

Ⅲ. VaRの計測と検証

VaRの様々な計測手法について説明します。VaRの計測はコンピュータが行うため、その計測過程はブラック・ボックス化しがちです。各計測手法の基本的な考え方やその前提、制約などについて理解しておく必要があります。

VaRをリスク管理に活用するためには、バックテストによる検証を行う必要があることや、VaRには予測値として限界があること、また、その補完のため、ストレステストを行う必要があることを理解することも重要です。

目次

1. VaR(バリュー・アット・リスク)
2. VaRの計測手法
3. バックテストによる検証
4. VaRの限界とストレステスト

1. VaR(バリュー・アット・リスク)

VaRの定義 (再掲)

- ① 過去の一定期間(観測期間)の変動データにもとづき
- ② 将来のある一定期間(保有期間)のうちに
- ③ ある一定の確率(信頼水準)の範囲内で
- ④ 被る可能性のある最大損失額を
- ⑤ 統計的手法により推定した値をVaRとして定義する。

VaRの特徴を一言でいうと（再掲）

- ◆ 「過去」のデータを利用して
- ◆ 統計的手法で「推定」される
- ◆ 「確率」を伴うリスク指標

VaR(バリュー・アット・リスク)は(再掲)

- どのくらいの損失が、どのくらいの確率で起きるかが分かる、画期的なリスク指標である。
- しかも、過去のデータに基づき統計的手法を用いて求められるため、客観性が高い。
- そのため、株主、顧客、当局に対する説得力が高い。

VaR(バリュー・アット・リスク)は (再掲)

- 統計的手法によって求められる指標であるため、その「前提」を確認する必要がある。
- 厳密に言えば、統計的に「推定」された値であり、使用に耐えられるか、バックテストなどで統計的に「検証」する必要がある。
- 「過去は繰り返す」という考え方に基づいて求められているため、予測値としては「限界」がある。ストレス・テストなどで「補完」する必要がある。

2. VaRの計測手法

(1) 市場VaRの計測手法

(2) 信用VaRの計測手法

(3) オペリスクVaRの計測手法

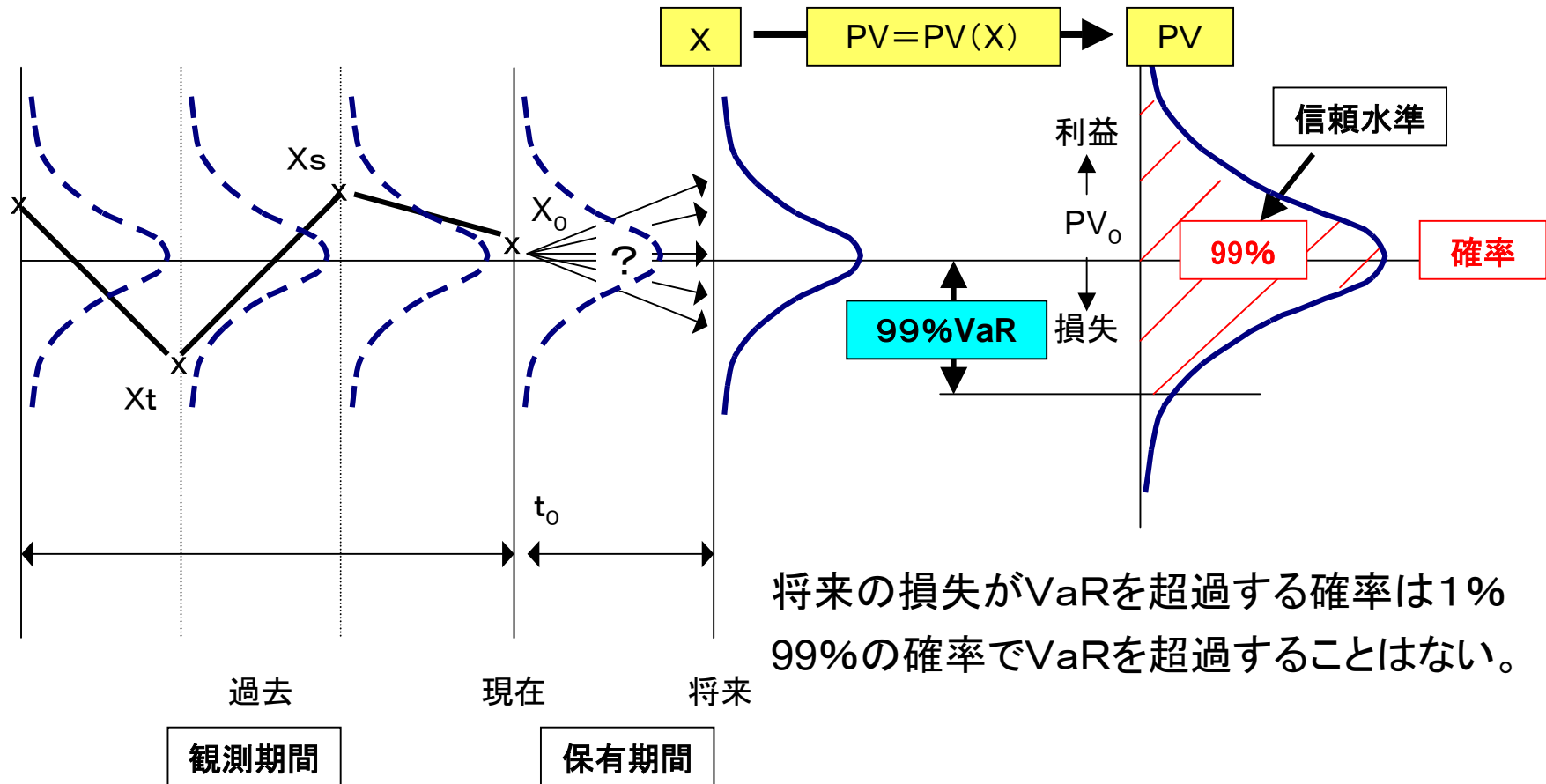
(1) 市場VaRの計測手法

- ◆ 金利・株価・為替等のリスクファクターの変動に伴って金融資産・負債の価値が、確率的に、どのように変動するかを捉える。
- ◆ 市場VaRの計測手法としては、①分散共分散法、②モンテカルロ・シミュレーション法、③ヒストリカル法等があるが、各計測手法の制約を踏まえ、リスクプロファイルに合った計測手法を選択する必要がある。

市場VaR(概念図)

リスクファクター(X:金利、株価、為替など)の推移と、その確率分布

現在価値(PV)ベースの確率分布



将来の損失がVaRを超過する確率は1%
99%の確率でVaRを超過することはない。

A. 分散共分散法

ー デルタ法とも呼ばれる

リスクファクターが正規分布にしたがって変動し、リスクファクターに対する当該資産・負債の現在価値の感応度(デルタ)が一定であると仮定して、VaRを算出する。

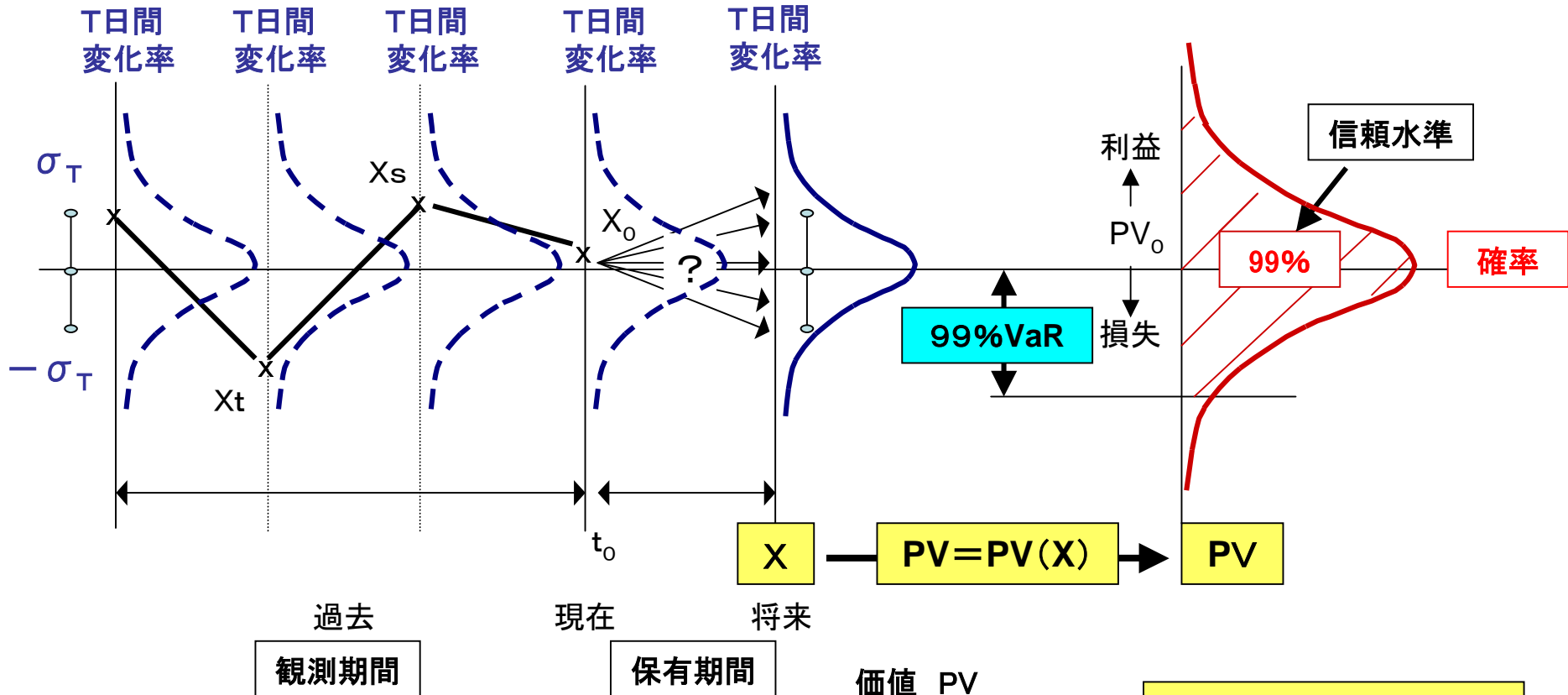
(利点)

- VaRの算出が容易。

(欠点)

- リスクファクターの変動が、必ずしも正規分布にしたがうとは限らない(例えば、実際の分布がファット・テイルの場合、VaRを過少評価する可能性)。
- 感応度(デルタ)が一定にならない場合は、近似式での計測となる。

分散共分散法(ムービング・ウィンドウ法)

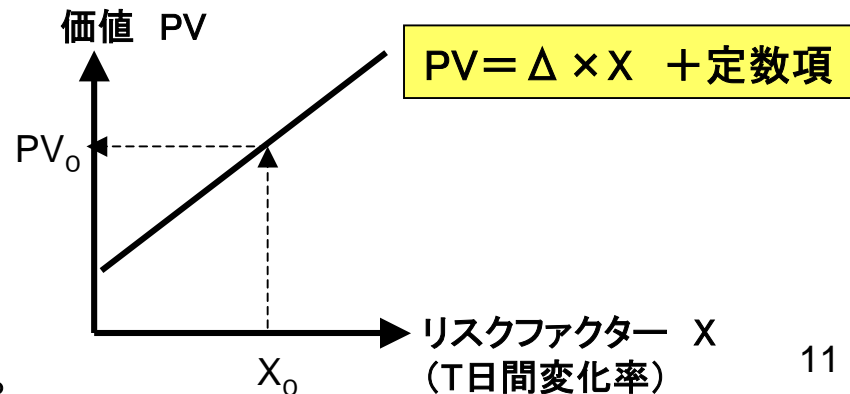


仮定①

リスクファクターの確率分布は正規分布(i. i. d.)

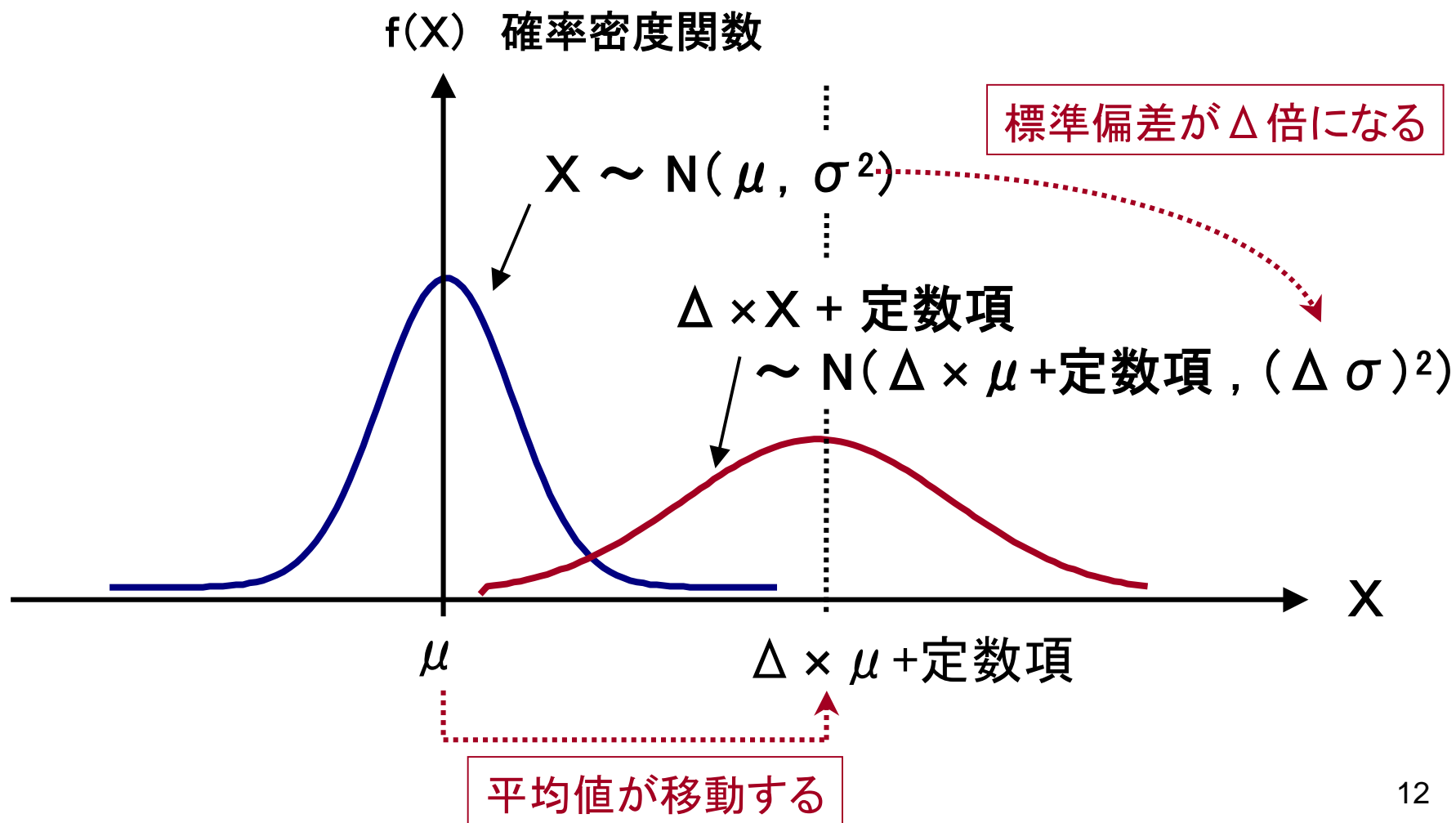
仮定②

Δ は一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVはリスクファクターの1次関数としてあらわされる。

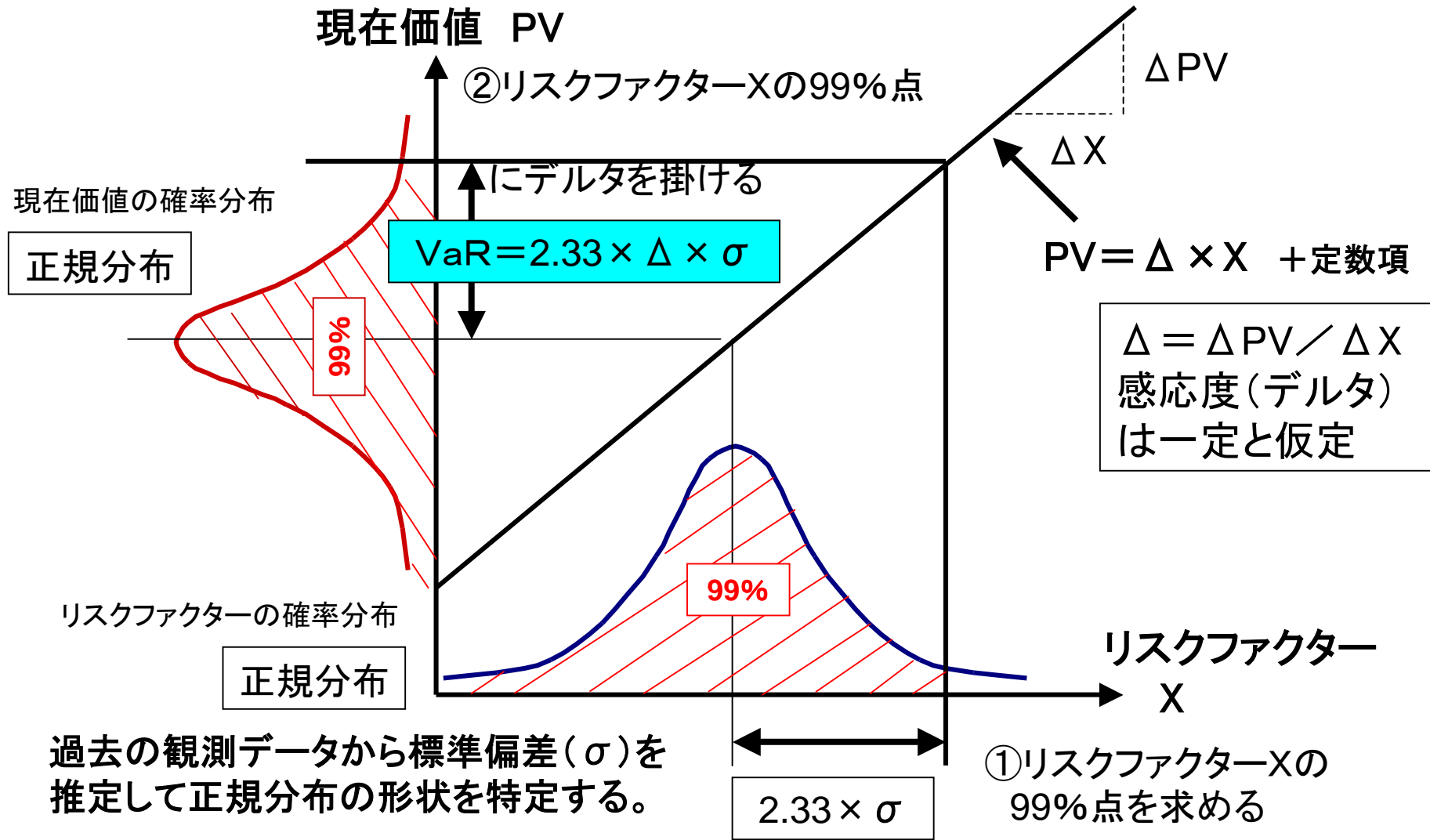


確率変数 X が正規分布にしたがうとき

確率変数 $\Delta \times X + \text{定数項}$ は正規分布にしたがう。



分散共分散法(ムービング・ウィンドウ法)



分散共分散法(ムービング・ウィンドウ法)の計算例

(例) 投信残高(PV) : 100億円(東証TOPIX指数に完全連動)

リスクファクター(X_t): 東証TOPIXの10日間変化率 ^(注1)

⇒ X_t は、同一かつ互いに独立な正規分布 $N(0, \sigma^2)$ にしたがって変動すると仮定。

観測期間 : 250日

保有期間 : 10日間

信頼水準 : 99%

現在価値の変化額 = 100億円 × 東証TOPIXの10日間変化率

$$\begin{aligned} \text{VaR} &= \boxed{\text{感応度}(\Delta)} \times \boxed{\text{信頼係数} \times \text{リスクファクターの標準偏差}(\sigma)} \\ &= \boxed{100\text{億円}^{(\text{注2})}} \times \boxed{2.33\sigma} \end{aligned}$$

(注1) リスクファクターとしては、金利、為替、株価等の変化率(幅)を利用することが多い。

(注2) 感応度(Δ)は100億円(=現在価値の変動額÷東証TOPIXの10日間変化率)。

分散共分散法(ムービング・ウィンドウ法)による計算例

VaRの計算シート

株式投信 100 億円

観測データ 250

分散共分散法(デルタ法)

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数 (関数NORMSINV)	2.33	
標準偏差 (関数STDEVA)	3.869	%

↑
正規分布と想定

↓
信頼係数 × 標準偏差

	東証TOPIX 指数	→ (MW法)
2006/9/29	1610.73	10日間 変化率
2006/9/28	1602.57	0.785
2006/9/27	1591.04	1.194
2006/9/26	1549.41	0.319
2006/9/25	1549.41	-2.994
2006/9/24	1559.78	-3.783
2006/9/23	1563.60	-3.139
2006/9/22	1563.60	-3.894
2006/9/21	1580.08	-5.040
2006/9/20	1570.18	-3.538
2006/9/19	1591.98	-2.474
2006/9/18	1593.43	-2.248
2006/9/17	1598.13	-1.822
2006/9/16	1583.55	-1.875
2006/9/15	1585.98	

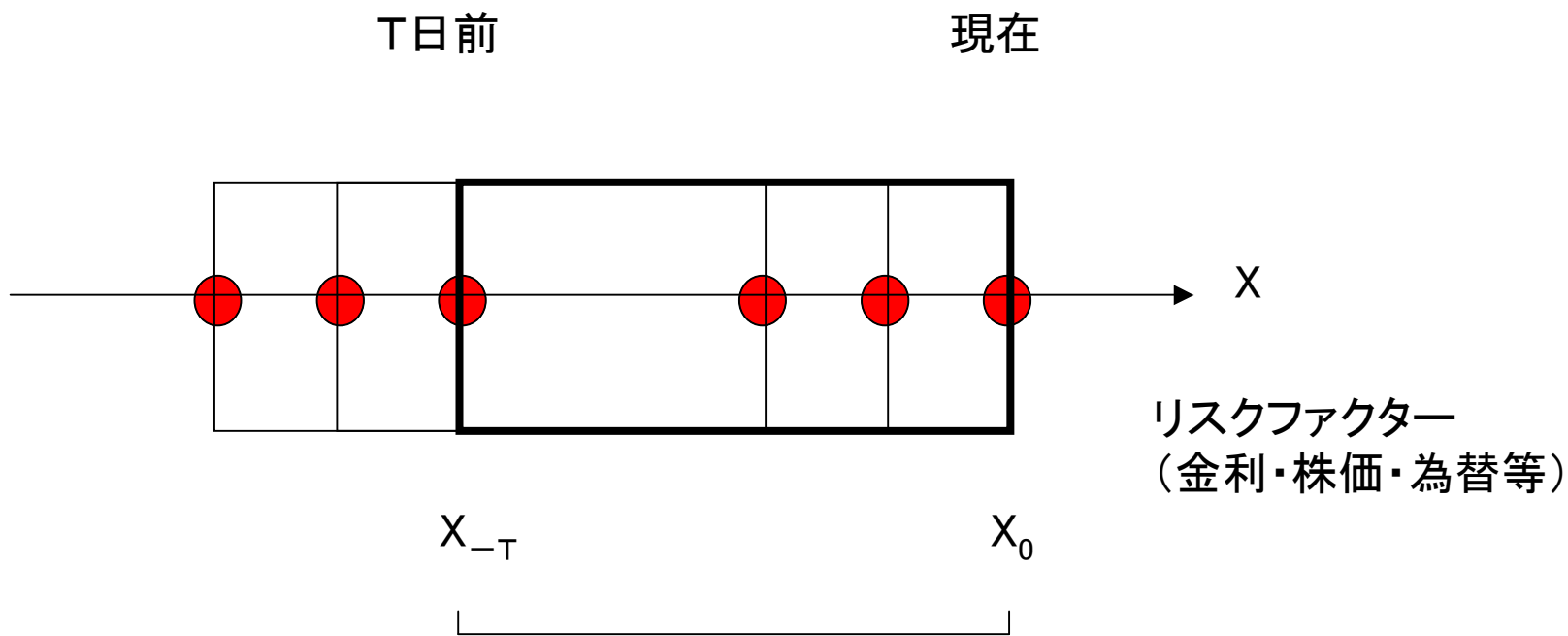
予想変化率	×	感応度	=	VaR	億円
9.000		100		9.00	

$PV = \Delta * X$

PV : 株式投信価額
 X : 東証TOPIX指数の変化率
 Δ : 直近時点の株式価額(PV₀) × 1

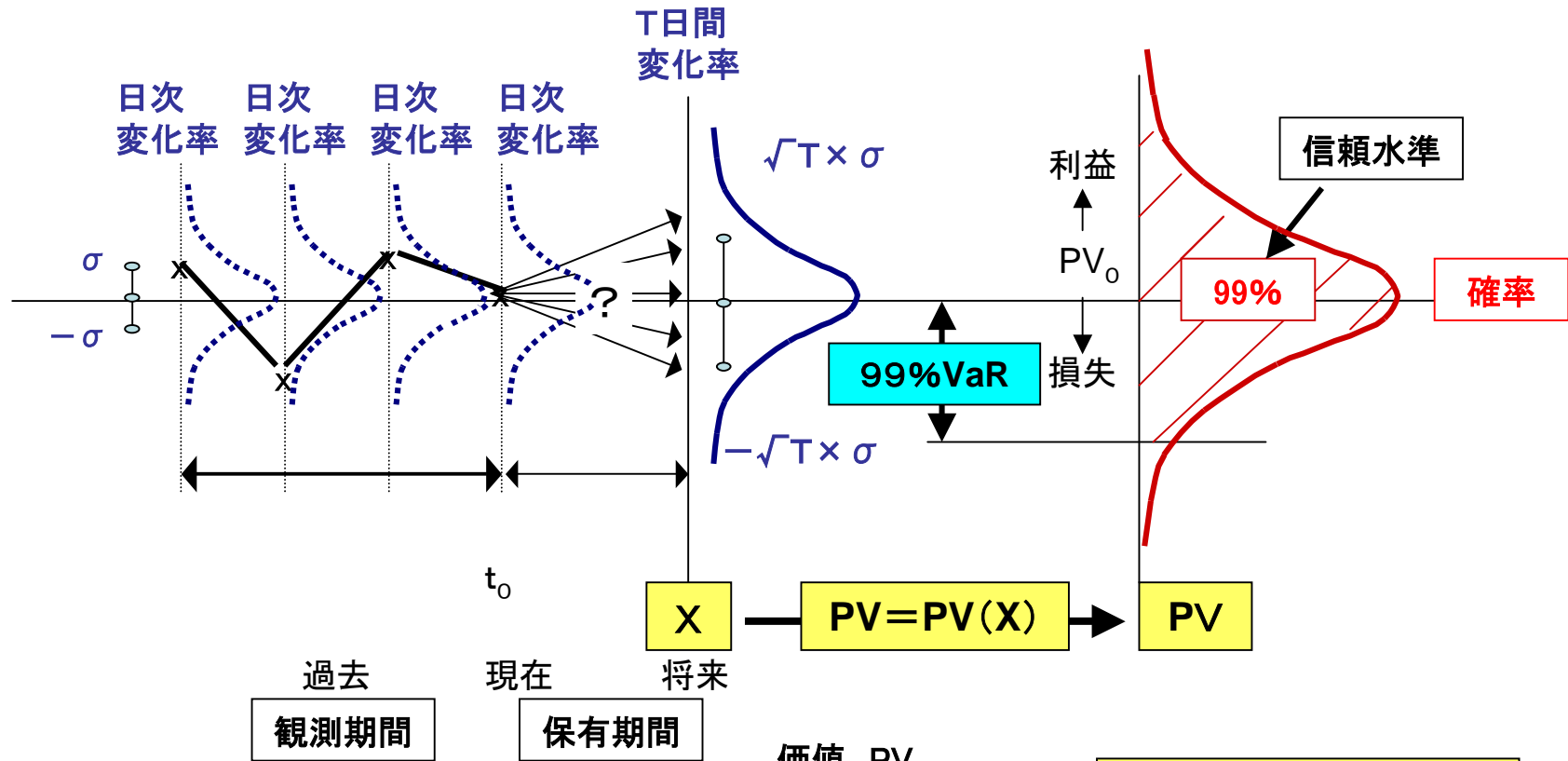
MW法 : ムービング・ウィンドウ法

ムービング・ウィンドウ法の名前の由来



$$\begin{aligned} & T \text{日間変化率} \\ & = \log(X_0 / X_{-T}) \end{aligned}$$

分散共分散法(ルートT倍法)

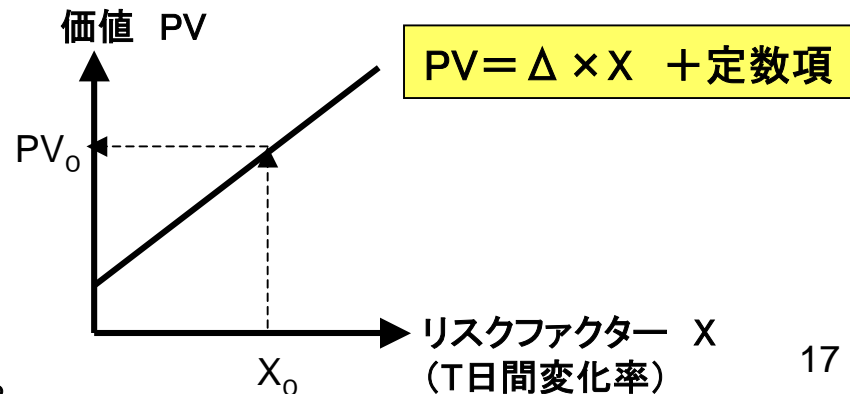


仮定①

リスクファクターの確率分布は正規分布(i. i. d.)

仮定②

Δ は一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVはリスクファクターの1次関数としてあらわされる。



分散共分散法(ルートT倍法)の計算例

(例) 投信残高(PV) : 100億円(東証TOPIX指数に完全連動)

リスクファクター(X_t): 東証TOPIXの日次・対数変化率 (注1)

⇒ X_t は、同一かつ互いに独立な正規分布にしたがって変動すると仮定。

観測期間 : 250日

保有期間 : 10日間

信頼水準 : 99%

$$\text{VaR} = \boxed{\text{感応度}(\Delta)} \times \boxed{\text{信頼係数} \times \text{10日間対数変化率の標準偏差}(\sigma_T)}$$

$$= \boxed{\text{感応度}(\Delta)} \times \boxed{\text{信頼係数} \times \text{日次対数変化率の標準偏差} \times \sqrt{10}}$$

$$= \boxed{100\text{億円}}^{(\text{注2})} \times \boxed{2.33 \sigma \times \sqrt{10}}$$

(注1) リスクファクターとしては、金利、為替、株価等の変化率(幅)を利用することが多い。

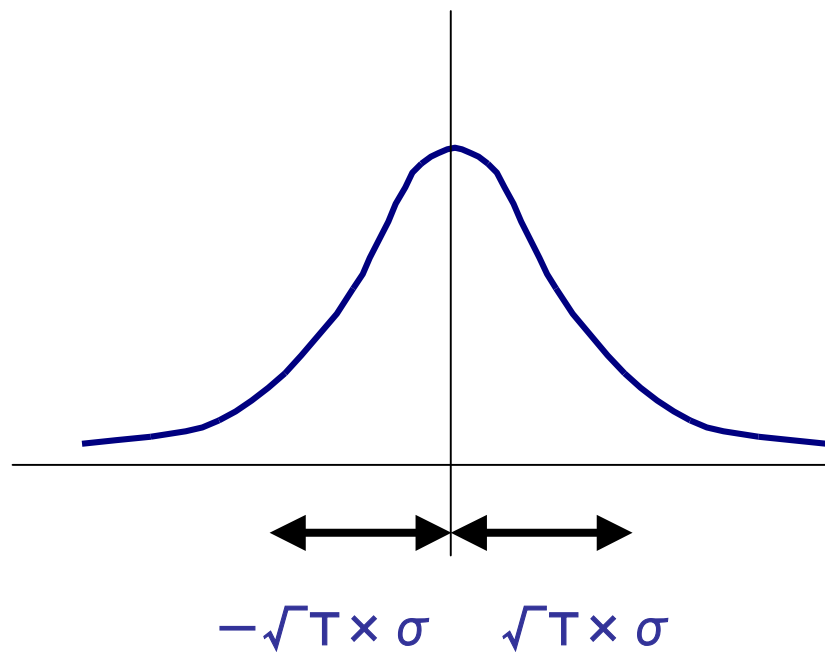
(注2) 感応度(Δ)は100億円(=現在価値の変動額÷東証TOPIXの10日間変化率)。

基本統計量	Excel関数	日次 対数変化率	10日間 対数変化率
データ数	COUNT	250	250
平均	AVERAGE	0.063	0.656
分散	VARA	1.540	14.966
標準偏差	STDEVA	1.241	3.869

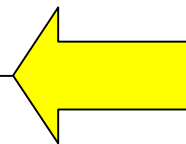
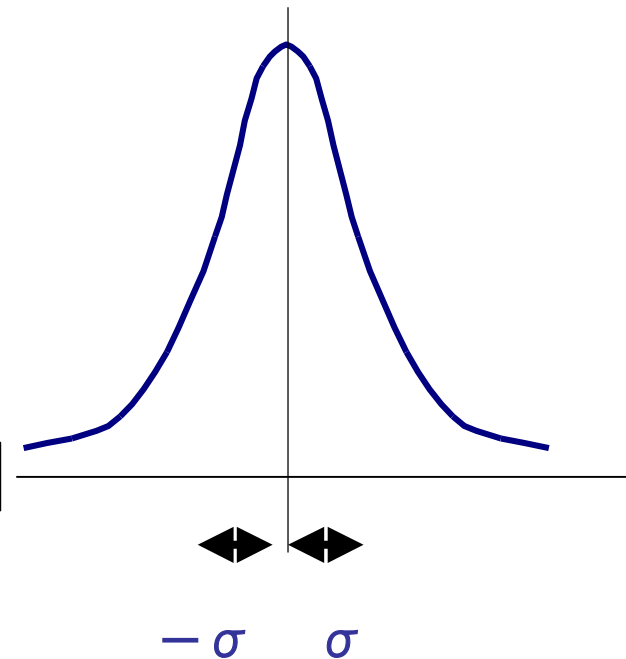
- 分散を計算してみると、10日間対数変化率の分散は、日次対数 変化率の分散の概ね10倍となっている。
- 標準偏差を計算してみると、10日間対数変化率の標準偏差は、日次対数変化率の標準偏差の概ね $\sqrt{10}$ 倍(=3.162倍)となっている。

ルートT倍ルール

10日間対数変化率
 $X_1 + X_2 + \dots + X_T$
の確率分布



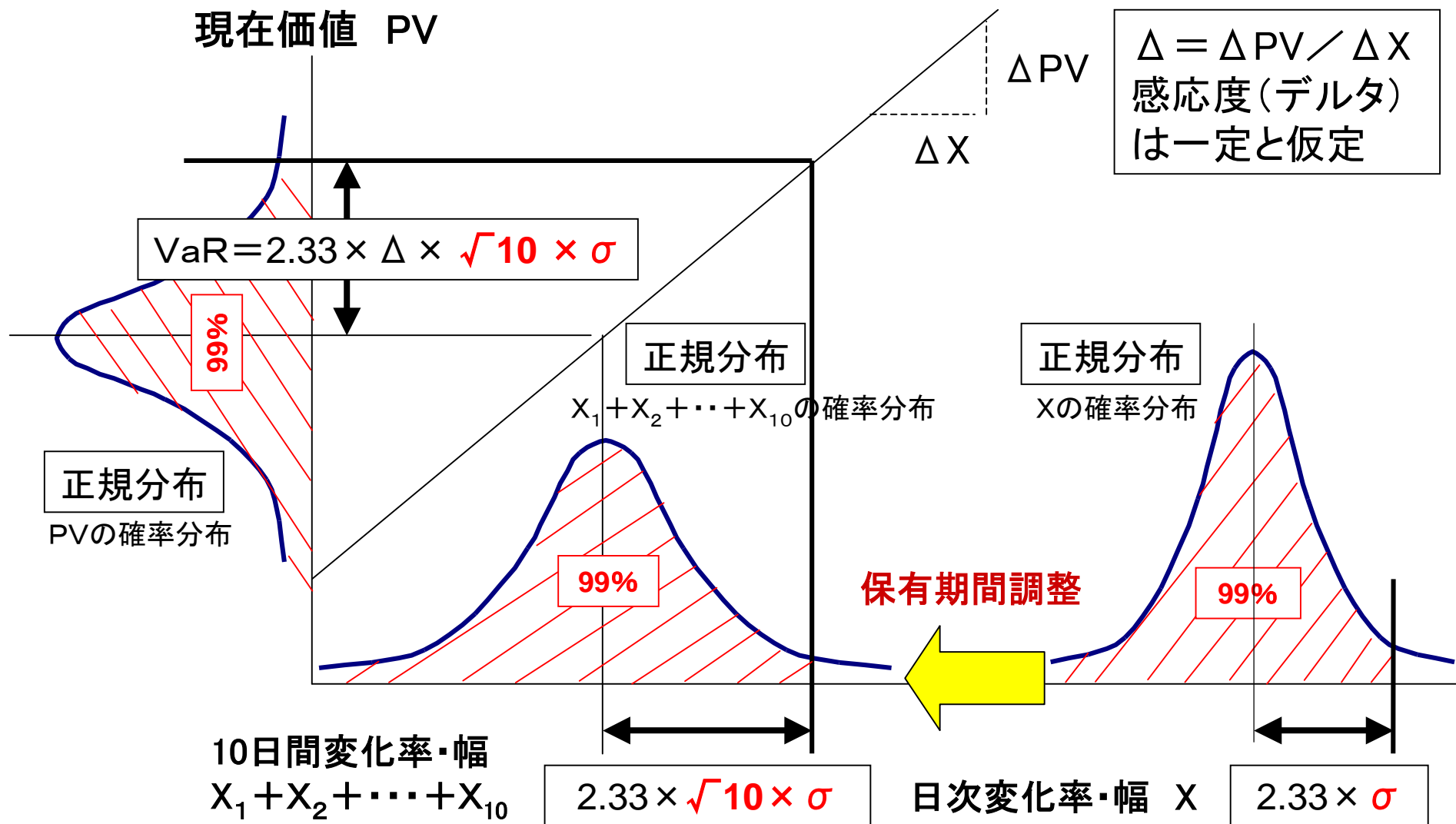
日次対数変化率
 X の確率分布



仮定

リスクファクターの確率分布は i. i. d.

分散共分散法(ルートT倍法)によるVaR計測手法



分散共分散法(ルートT倍法)による計算例

VaRの計算シート

分散共分散法(デルタ法)(保有期間調整)

株式投信 100 億円

観測データ 250

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数 (関数NORMSINV)	2.33	
日次・標準偏差 (関数STDEVA)	1.241	%
保有期間調整 (保有期間) ^{0.5}	3.162	

↑ ↓

正規分布を想定 ↑

↓ 信頼計数 × 日次・標準偏差 × √T

	東証TOPIX 指数
2006/9/29	1610.73
2006/9/28	1602.57
2006/9/27	1591.04
2006/9/26	1549.41
2006/9/25	1559.78
2006/9/22	1563.60
2006/9/21	1580.08
2006/9/20	1570.18
2006/9/19	1591.98
2006/9/15	1593.43
2006/9/14	1598.13
2006/9/13	1583.55
2006/9/12	1585.98

→

日次 変化率
0.508
0.722
2.651
-0.667
-0.245
-1.048
0.629
-1.379
-0.091
-0.295
0.917
-0.153
-0.661

予想変化率	感応度	VaR
9.130	100	9.13 億円

PV = Δ * X	
PV :	株式投信価額
X :	東証TOPIX指数の変化率
Δ :	直近時点の株式価額(PV ₀) × 1

留意事項

ムービング・ウィンドウ法か、ルートT倍法か

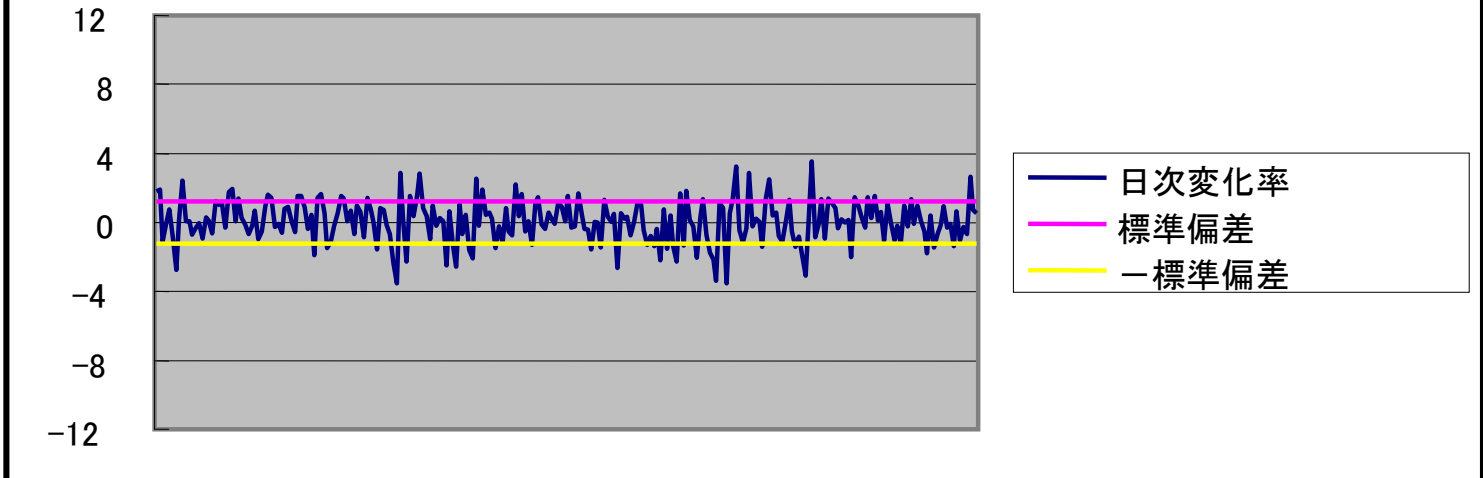
- ◆ リスクファクターの観測データに関して、ムービング・ウィンドウ法でT日間の変化率・変化幅を取得すると、自己相関が観察されることが多い。
- ◆ 分散共分散法では、観測データの独立が前提となっているが、ムービング・ウィンドウ法では、その前提が満たされないことになる。
- ◆ このため、ムービング・ウィンドウ法を積極的には採用しない考え方もある。

留意事項

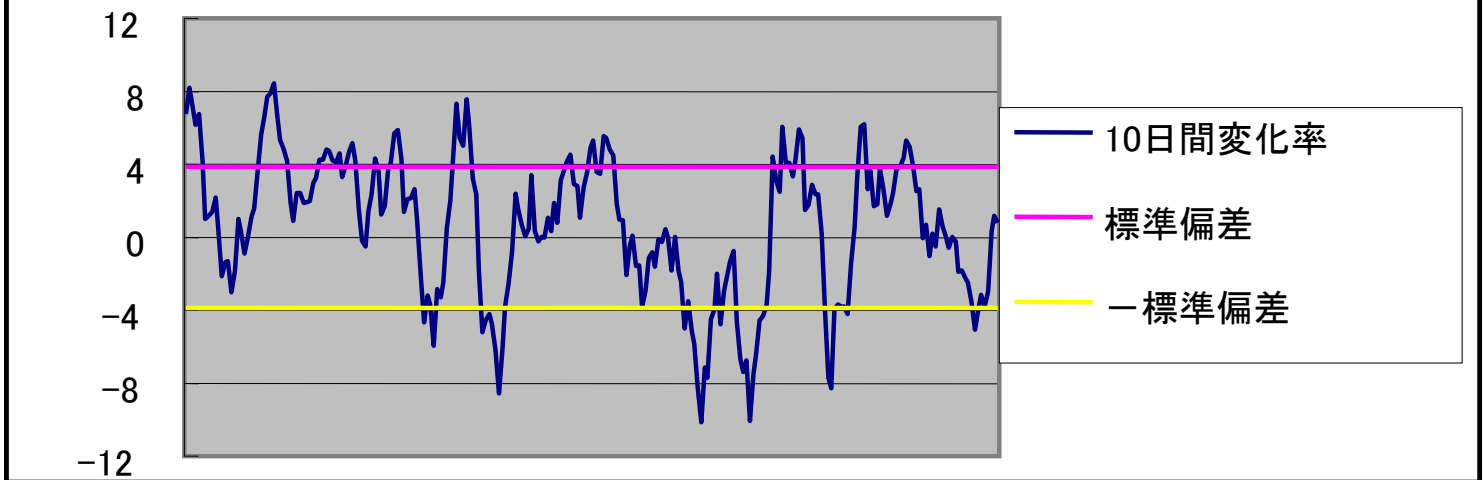
ムービング・ウィンドウ法か、ルートT倍法か

- ◆ リスクファクターの観測データに関して、日次変化率・変化幅をみると、外見上、自己相関は、気にならないほど小さくなる。
- ◆ しかし、日次変化率・変化幅を観測データとしても、統計的に厳密な意味で、その「独立性」を確認することは難しいことが少なくない。
- ◆ ルートT倍法では、保有期間が長くなるほど、精度が低下することは否めないため、ルートT倍法の適用は、保有期間が短いケースに限定すべきとの考え方もある。

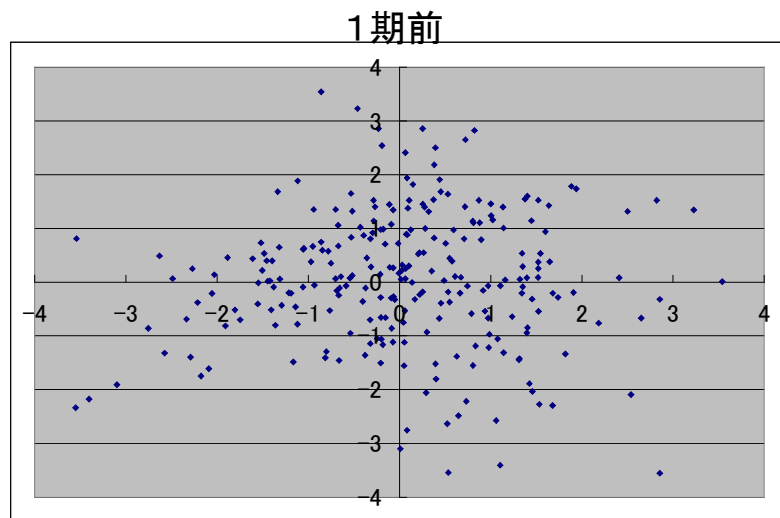
東証TOPIX日次変化率の推移



東証TOPIX10日間変化率の推移

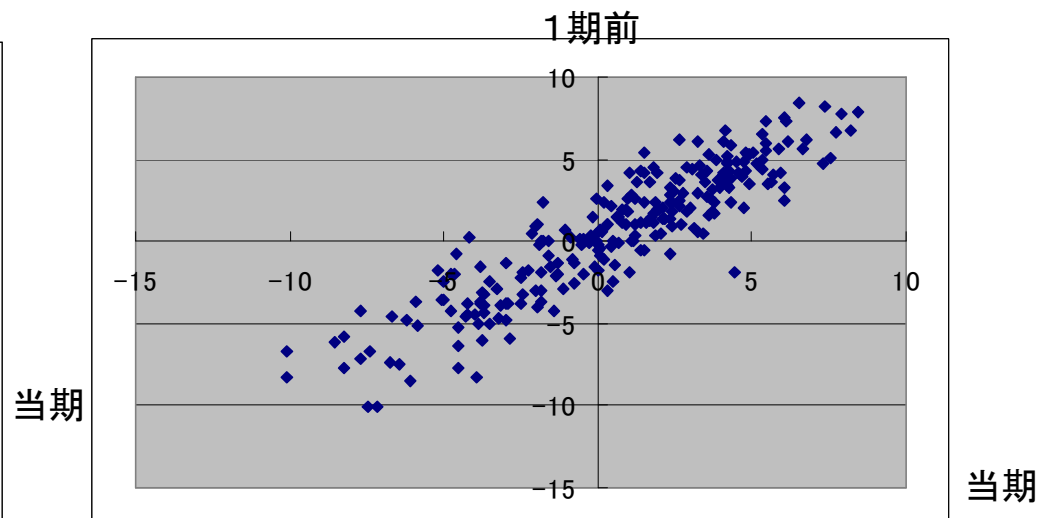


東証TOPIX・日次変化率



相関係数 $\rho = 0.037$

東証TOPIX・10日間変化率



相関係数 $\rho = 0.905$

- 上図は、過去1年間のデータをもとに、東証TOPIX・変化率と、1期前の変化率との相関関係（自己相関）をみたもの。

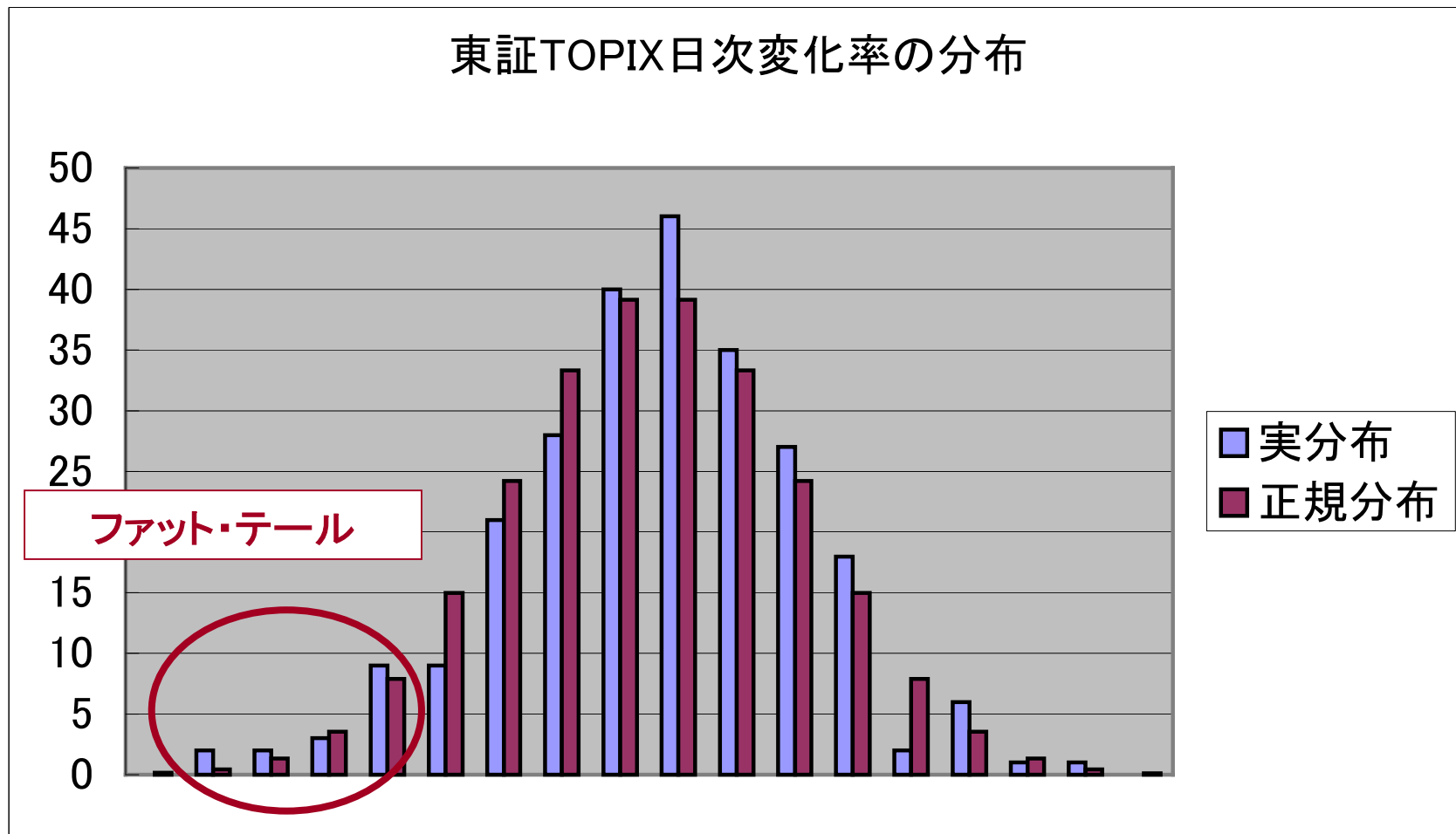
留意事項

近似的な適用

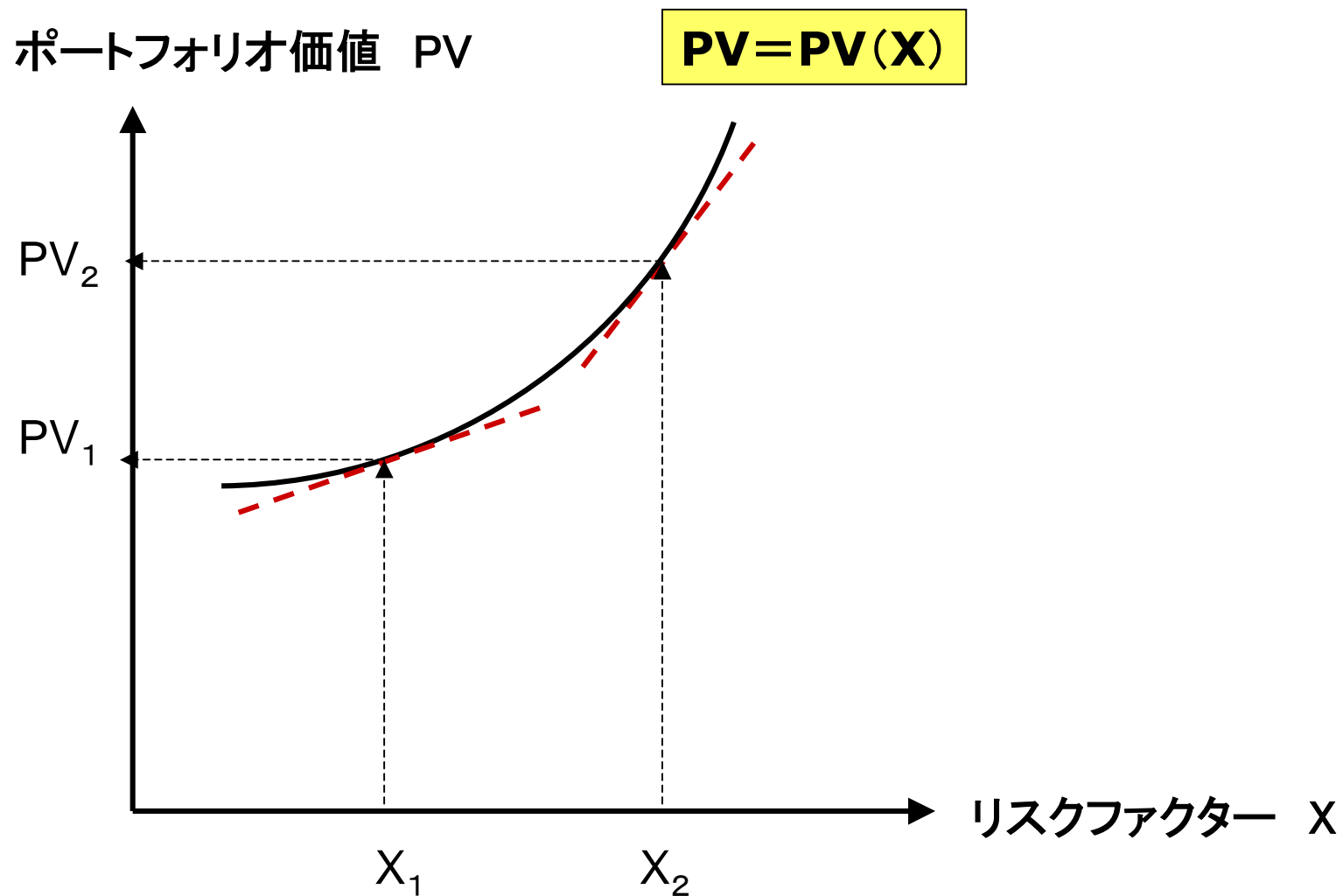
- ◆ リスクファクターの変動が正規分布にしたがっていない。
- ◆ デルタ一定の仮定も満たされない。
- ◆ 分散共分散法で計測されたVaRは全く意味がないのか？

- ◆ 分散共分散法で計測されたVaRについて「近似的な適用」が可能かどうかを検討する。

リスクファクターの変動 : ファットテールなケース



ポートフォリオ価値とリスクファクターの関係 : デルター一定が満たされないケース



留意事項

相関の考慮

- ◆ ポートフォリオ価値に影響を与えるリスクファクターは複数存在する。
- ◆ リスクファクター間の「相関」がリスクの総量を変化させる。
- ◆ リスクファクター間の「相関」をみながらポートフォリオの残高・構成を見直すのが一般的。
 - 分散投資によるポートフォリオ価値の安定化
 - レバレッジを利かせたハイリスク・ハイリターン投資

リスクファクターが複数の場合の計算例

(例) 国債と株式投信からなるポートフォリオを前提。

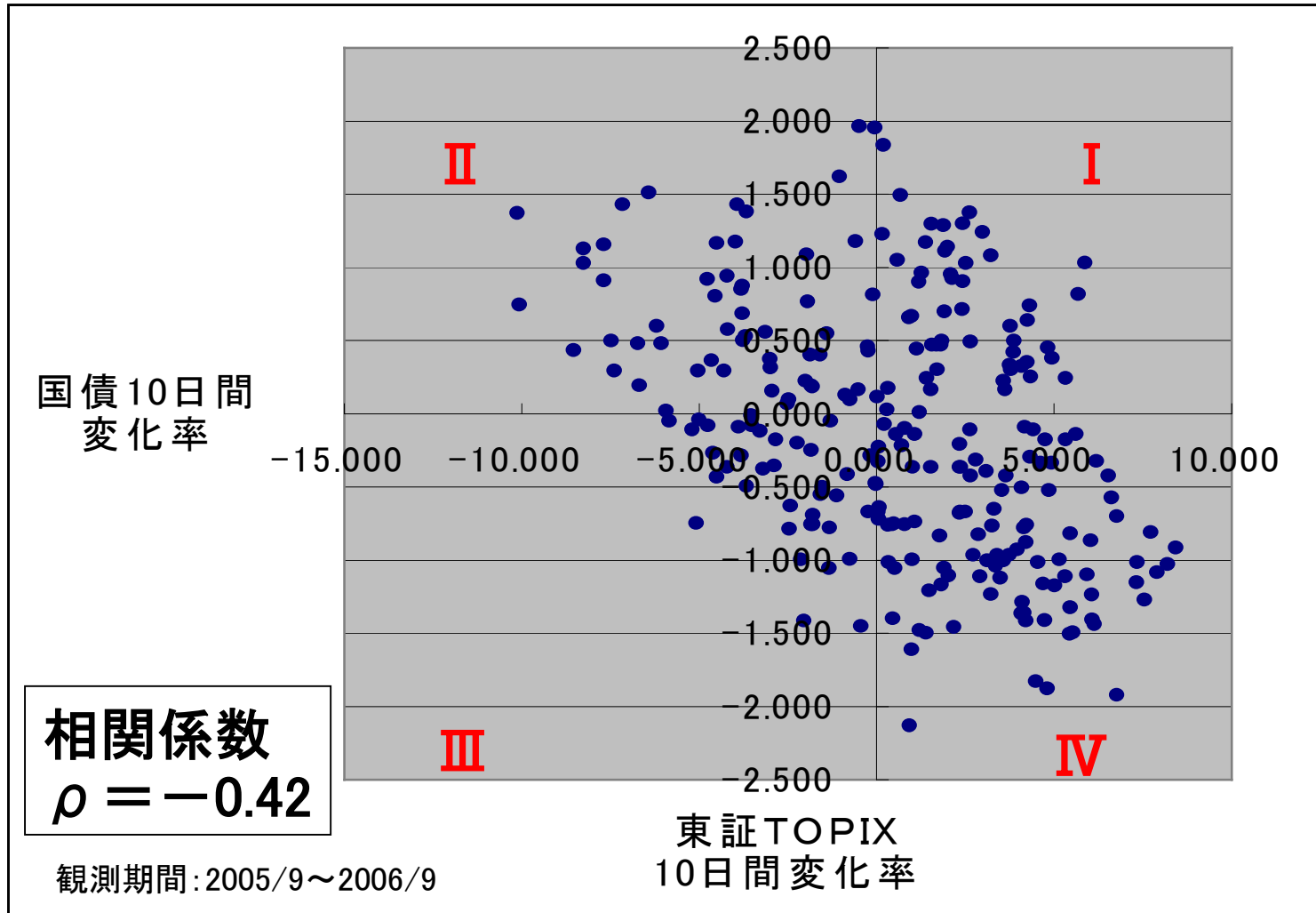
- ◆ リスクファクターは「国債価格の変化率」と「株価の変化率」。
- ◆ 国債価格の変動と株価の変動には負の相関が認められる。

国債価格 ↑(↓) 株価 ↓(↑)

- ◆ ポートフォリオ全体の現在価値をみるとき、両者の変動が
お互いの影響を相殺し合うことがある。

国債価格変化率と株価変化率の相関関係

- ◆ **II、IV**のエリアに分布が多く、「負の相関」が観察される。



リスクファクターが複数の場合の計算例

- ◆ ポートフォリオ全体のVaRは、国債VaRと株式投信VaRの単純合算よりも小さくなる。
 - ⇒ ポートフォリオ効果
- ◆ 相関係数の値により、ポートフォリオ効果は変化する。
- ◆ 相関係数 = +1 となる場合、ポートフォリオ全体のVaRは、単独VaRの単純合算となる。

分散共分散法(デルタ法)の計算例 — リスクファクターが2つの場合

VaRの計算シート 分散共分散法(MW法)

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日
-------	-----	---

	東証TOPIX 10日間変化率	10年割引国債 10日間変化率
2006/9/29	0.785	-0.098
2006/9/28	1.194	0.010
2006/9/27	0.319	0.177
2006/9/26	-2.994	0.315
2006/9/25	-3.783	0.688
2006/9/22	-3.139	0.560
2006/9/21	-3.894	-0.088
2006/9/20	-5.040	0.295
2006/9/19	-3.538	-0.010
2006/9/15	-2.474	0.098
2006/9/14	-2.248	-0.197
2006/9/13	-1.822	0.187
2006/9/12	-1.875	0.403
2006/9/11	-0.235	0.433
2006/9/8	0.007	0.118
2006/9/7	-0.591	1.179
2006/9/6	0.155	1.228
2006/9/5	0.582	1.051
2006/9/4	1.534	1.296
2006/9/1	-0.495	1.964
2006/8/31	0.184	1.837

株式投信	単独VaR	=	標準偏差	× 信頼係数	× 感応度
割引国債	9.00		3.8686	2.33	100
	1.99		0.8568	2.33	100

単純合算	ポートVaR	① > ②: ポートフォリオ効果
相関考慮後	10.99	
	8.35	

投信VaR	国債VaR	相関行列		9.00	投信VaR
9.00	1.99	1	-0.4233	1.99	国債VaR
		-0.4233	1		

行列計算(関数MMULT)

8.1560	-1.8162
--------	---------

行列計算(同)

VaR²: 69.78

VaR: 8.35

投信感応度	国債感応度	分散共分散行列		100.00	投信感応度
100.00	100.00	14.96626	-1.4031	100.00	国債感応度
		-1.4031	0.7341395	100.00	

行列計算(関数MMULT)

1356.3178	-66.8938
-----------	----------

行列計算(同)

ポート分散: 12.89 (単位調整)

ポート標準偏差: 3.59

信頼係数: 2.33

ポートVaR: 8.35

(リスクファクターが1変量の場合)

99%VaR = 信頼計数 × ポートフォリオの現在価値の標準偏差 σ_{pv}

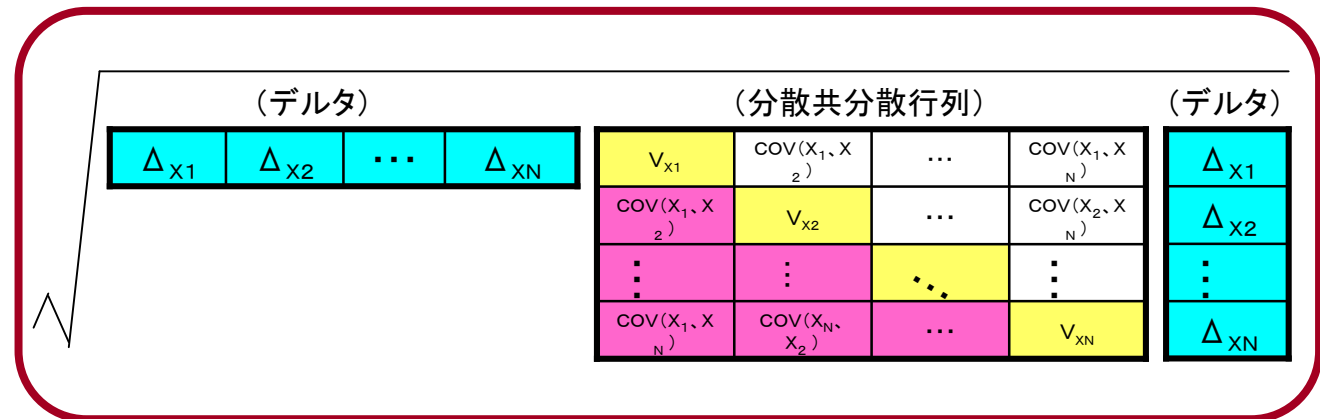
= 信頼計数 ×

$\Delta \times$ リスクファクターXの標準偏差 σ_x

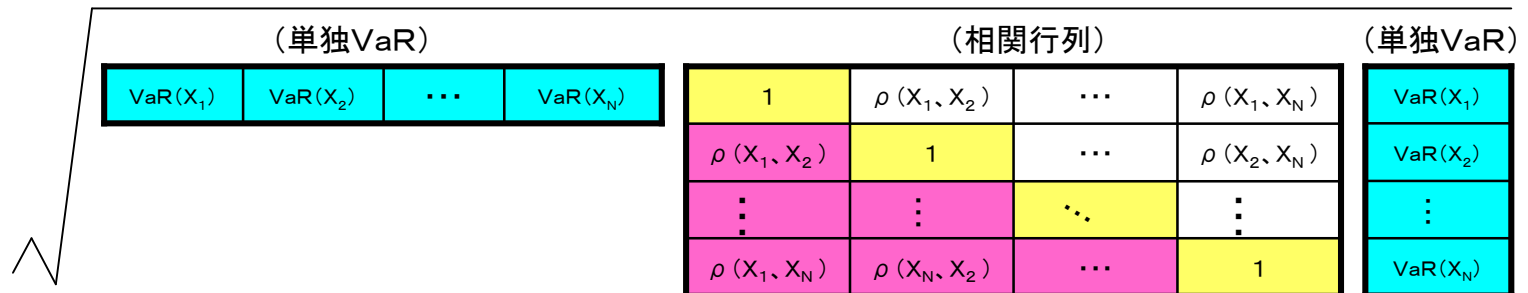
(リスクファクターが多変量の場合)

99%VaR = 信頼計数 × ポートフォリオの現在価値の標準偏差 σ_{pv}

= 信頼計数 ×



=



留意事項

- ◆ リスクファクター間の相関を考慮したVaRを計測するとき、相関行列、分散共分散行列の変化が与える影響が大きい。
- ◆ このため、相関行列、分散共分散行列の変化について、常にフォローする必要がある。
 - ⇒ 代表的な相関係数、分散共分散の項目を幾つか決めて変化をみていくのが良い。
- ◆ また、システムによっては、VaR計測の都度、最新データで、相関行列、分散共分散行列が再計算されないケースもあるので、その更新頻度にも注意を要する。

B. モンテカルロ・シミュレーション(MS法)

乱数を利用して、繰り返しリスクファクターの予想値を生成する。

上記リスクファクターの予想値に対応した当該資産・負債の現在価値をシミュレーションにより算出する。

シミュレーションで得られた現在価値を降順に並べて、信頼水準に相当するパーセント・タイル値からVaRを求める。

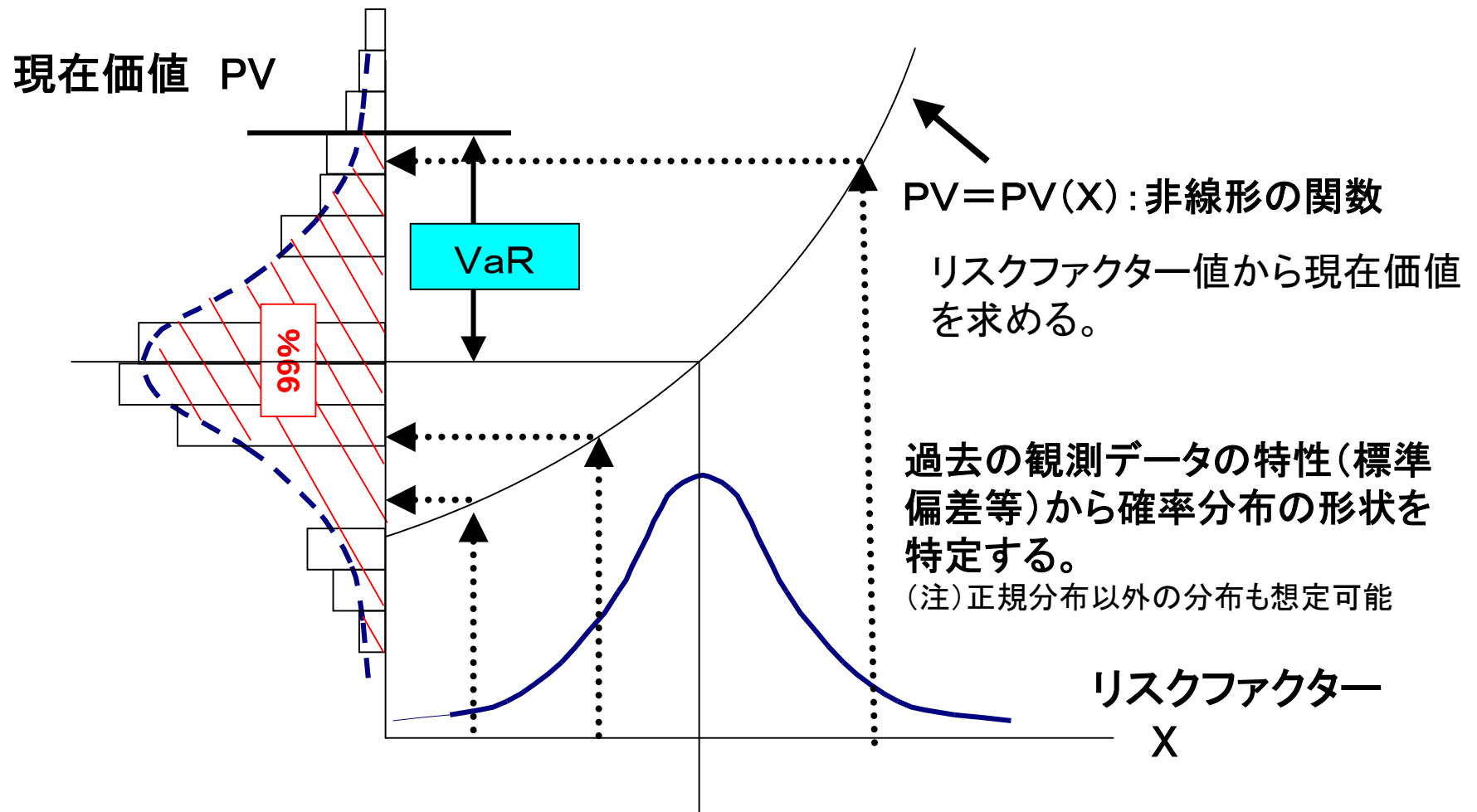
(利点)

- ・リスクファクターの確率分布について正規分布以外も想定可能。
- ・非線型リスクの強い商品の評価が可能。

(欠点)

- ・リスクファクターの分布に前提あり(モデルリスク)。
- ・複雑なモデルで大量のデータを扱うと、計算結果の収束に時間がかかる。

乱数を利用し、繰り返しリスクファクターの予想値を生成。
その予想値をヒストグラム化するイメージ



乱数を利用して、繰り返しリスクファクターの予想値を生成

VaRの計算シート

モンテカルロ・シミュレーション法

株式投信 100 億円

保有期間 10 日
 信頼水準 99.0 %

F9キーで再計算

観測データ 250

分布関数を特定(ここでは正規分布)
 標準偏差 (関数STDEVA) 3.869 %

VaR
 8.92 億円

↑

↓

↑

↑

↓ 乱数で1万個の予想変化率を発生

関数PERCENTILE

↑

↓ $NORMSINV(RAND()) \times$ 標準偏差

↑

	東証TOPIX 指数
2006/9/29	1610.73
2006/9/28	1602.57
2006/9/27	1591.04
2006/9/26	1549.41
2006/9/25	1559.78
2006/9/22	1563.60
2006/9/21	1580.08
2006/9/20	1570.18
2006/9/19	1591.98
2006/9/15	1593.43
2006/9/14	1598.13
2006/9/13	1583.55
2006/9/12	1585.98
2006/9/11	1596.50
2006/9/8	1619.92

→ (MW法)

10日間 変化率
0.785
1.194
0.319
-2.994
-3.783
-3.139
-3.894
-5.040
-3.538
-2.474
-2.248
-1.822
-1.875
-0.235
0.007

10日間 予想変化率
-1.9155
0.0509
5.0609
-2.3250
-0.1294
2.1462
1.1020
-8.9002
-5.5228
2.6461
-2.5754
-2.5844
-2.3236
2.1802
3.0396

残高
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00
100.00

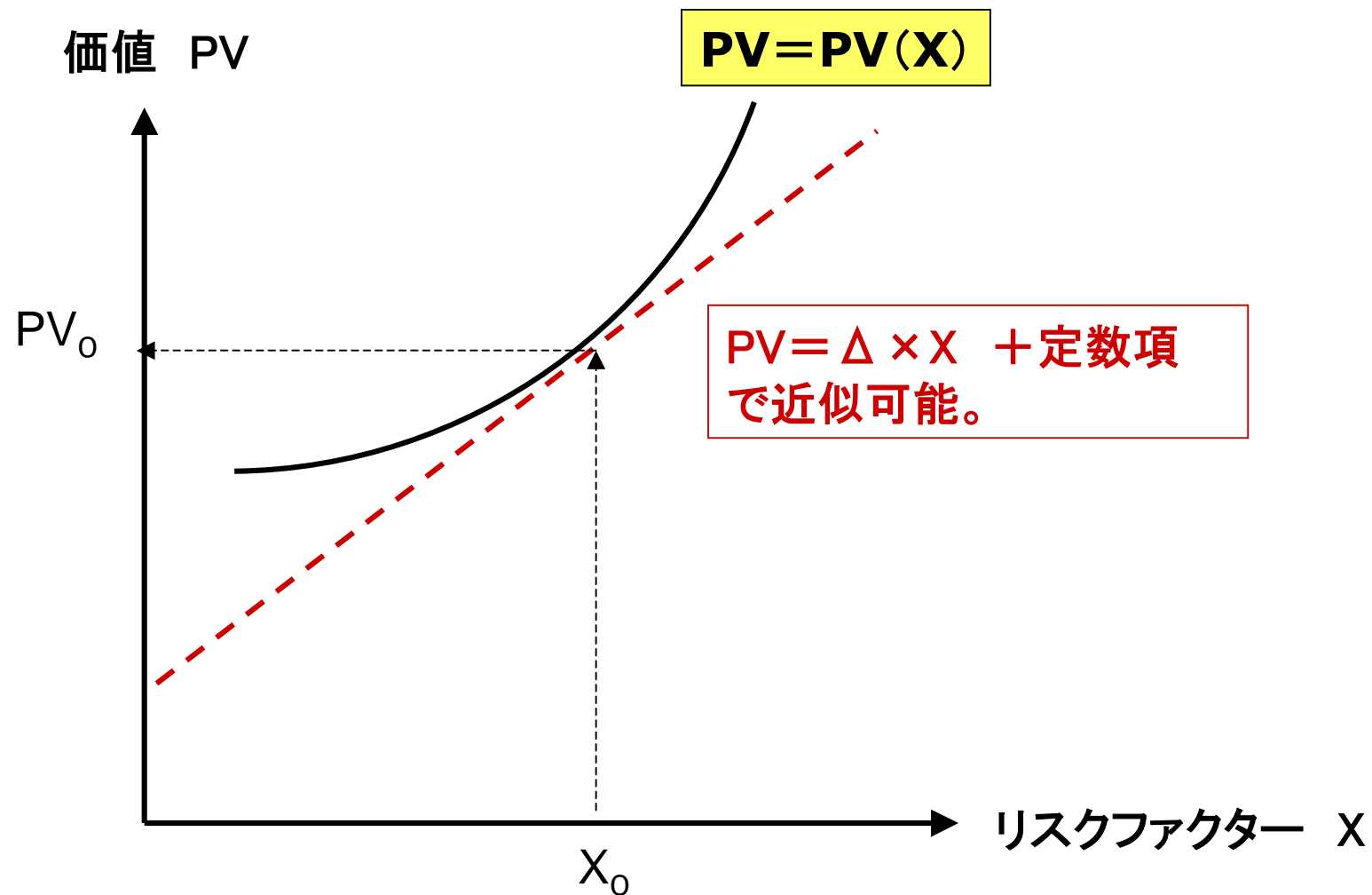
10日間 予想増減額
-1.9155
0.0509
5.0609
-2.3250
-0.1294
2.1462
1.1020
-8.9002
-5.5228
2.6461
-2.5754
-2.5844
-2.3236
2.1802
3.0396

億円

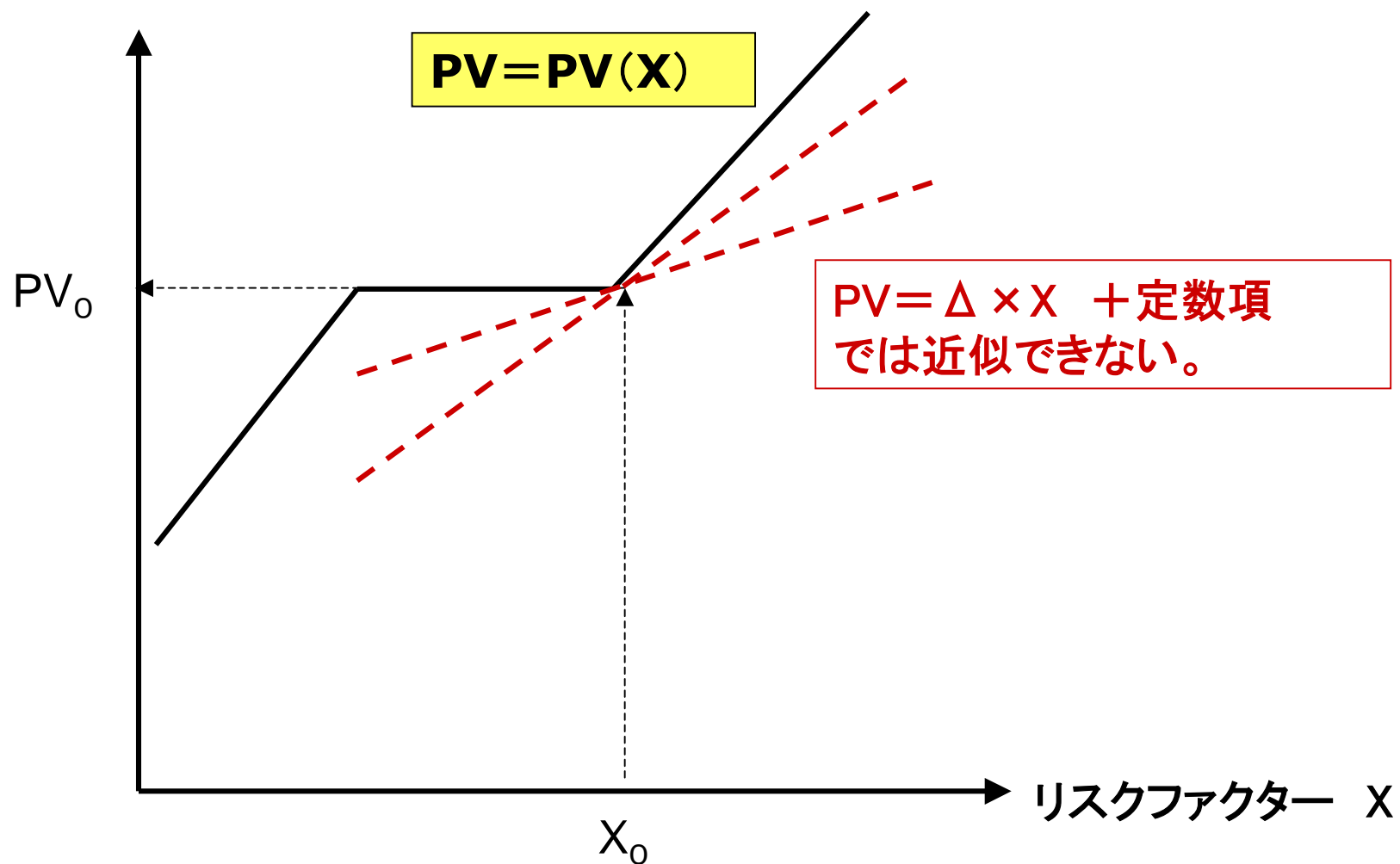
留意事項

- ◆ 分散共分散法では、デルタ一定が前提となっている。非線形リスクが強いオプション性の商品については、分散共分散法によるVaRの計測値では、近似精度が十分に得られないことがある。
- ◆ 非線形リスクが強いオプション性の商品についてはモンテカルロ・シミュレーション法により、VaRを計測するのが望ましい。

デルタ(Δ)一定の仮定が満たされなくても
近似精度が相応に得られ、分散共分散法を適用しても問題がないケース



デルタ(Δ)一定の仮定が満たされないため、
近似精度が殆ど得られず、分散共分散法を適用するのが適当でないケース



C. ヒストリカル法

現時点のポートフォリオ残高・構成を前提に、過去のリスクファクター値を利用して、理論価値を遡って計算する。
こうして得られた現在価値の分布を用いて信頼水準に相当するパーセント・タイル値からVaRを求める。

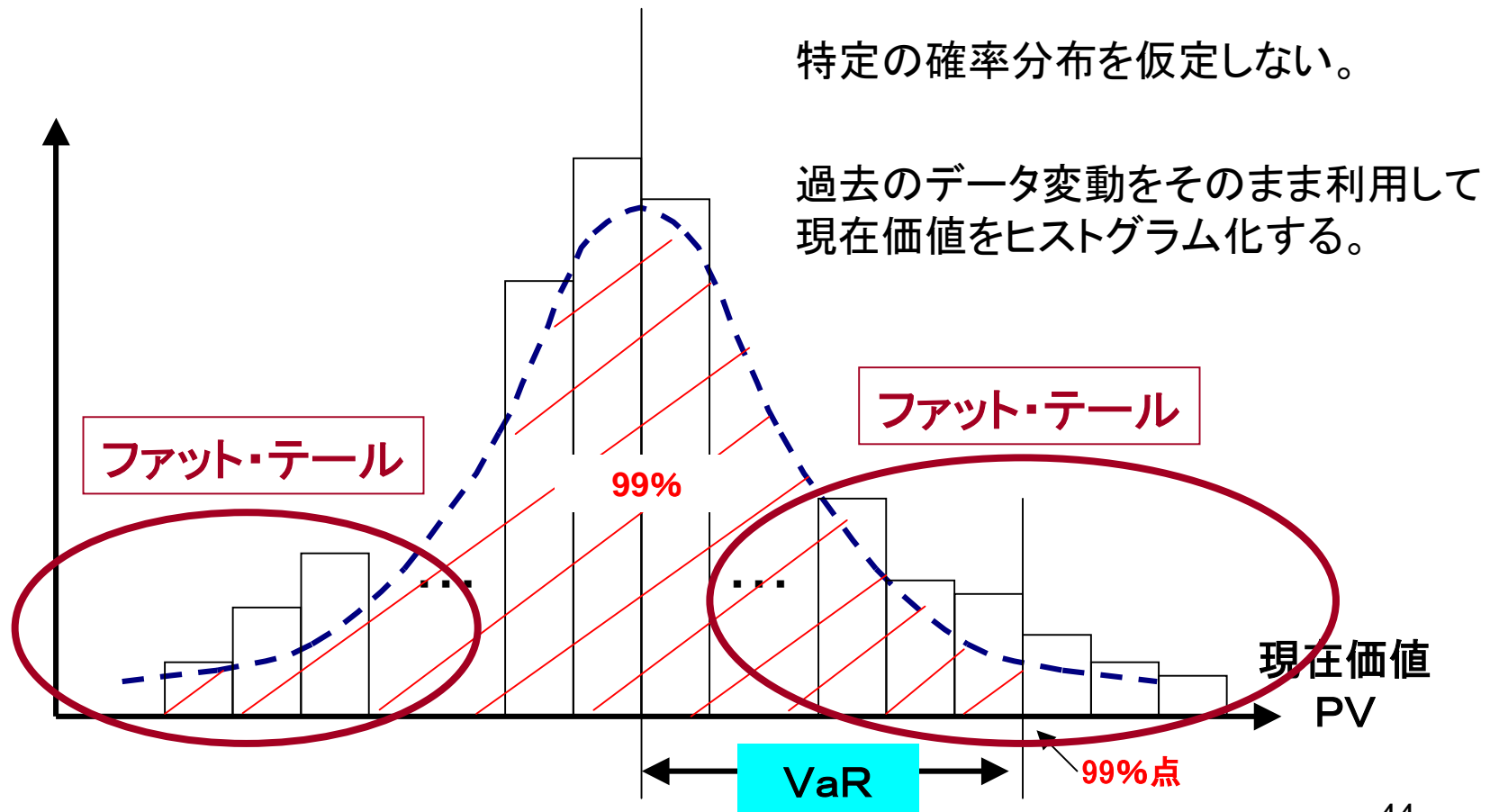
(利点)

- ・ 確率分布として特定の分布を前提にしない(過去のデータ変動にもとづく分布をそのまま利用する)。

(欠点)

- ・ 各手法とも、遠い過去のデータに引摺られたり、データ数が少ないと計測結果が不安定化するが、とくにヒストリカル法では、その傾向が顕著となる。

ヒストリカル法は、過去のデータ変動を利用して
そのままヒストグラムを作る(イメージ図)



VaRの計算シート

ヒストリカル法

株式投信 100 億円

保有期間 10 日
信頼水準 99.0 %

観測データ 250

VaR
8.40 億円

↑
関数PERCENTILE
↑

	東証TOPIX 指数	→ (MW法)	10日間 変化率		残高	=	10日間 予想増減額	億円
2006/9/29	1610.73		0.785	×	100.00	=	0.7853	
2006/9/28	1602.57		1.194	×	100.00	=	1.1939	
2006/9/27	1591.04		0.319	×	100.00	=	0.3185	
2006/9/26	1549.41		-2.994	×	100.00	=	-2.9940	
2006/9/25	1559.78		-3.783	×	100.00	=	-3.7832	
2006/9/22	1563.60		-3.139	×	100.00	=	-3.1390	
2006/9/21	1580.08		-3.894	×	100.00	=	-3.8939	
2006/9/20	1570.18		-5.040	×	100.00	=	-5.0403	
2006/9/19	1591.98		-3.538	×	100.00	=	-3.5385	
2006/9/15	1593.43		-2.474	×	100.00	=	-2.4744	
2006/9/14	1598.13		-2.248	×	100.00	=	-2.2478	
2006/9/13	1583.55		-1.822	×	100.00	=	-1.8216	
2006/9/12	1585.98		-1.875	×	100.00	=	-1.8745	
2006/9/11	1596.50		-0.235	×	100.00	=	-0.2346	
2006/9/8	1619.92		0.007	×	100.00	=	0.0068	
2006/9/7	1613.46		-0.591	×	100.00	=	-0.5914	

留意事項

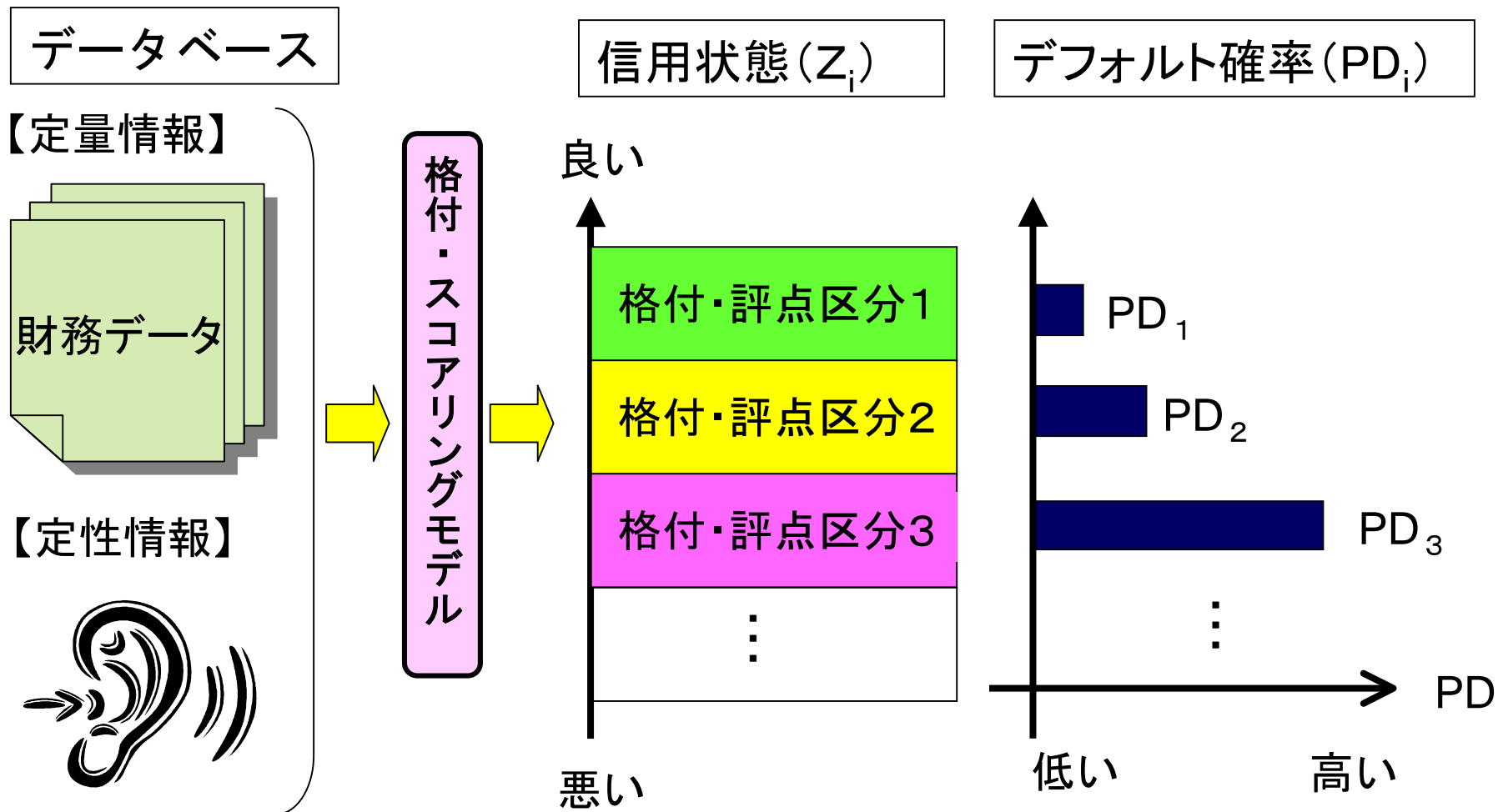
- ◆ 市場VaRは、これまで、分散共分散法で計測されることが多かったが、近年、ヒストリカル法へ移行する先が増加している。
 - ヒストリカル法は、確率分布に特定の仮定を置かず、過去データの変動に基づく分布を利用するため、対外的に説明しやすい。
 - ヒストリカル法では、データ制約が問題になることが多いが、市場リスクに関しては日次ベースで観測データを取得可能（99%程度の信頼水準ならば観測データは不足しない）。

(2) 信用VaRの計測方法

- ◆ 個別債務者(i)が確率(p_i)でデフォルトし、そのとき貸倒れに伴う損失(L_i)が発生するという前提で、(注) 全債務者に関するモンテカルロ・シミュレーションを行って得られた損失分布からVaRを計測する。

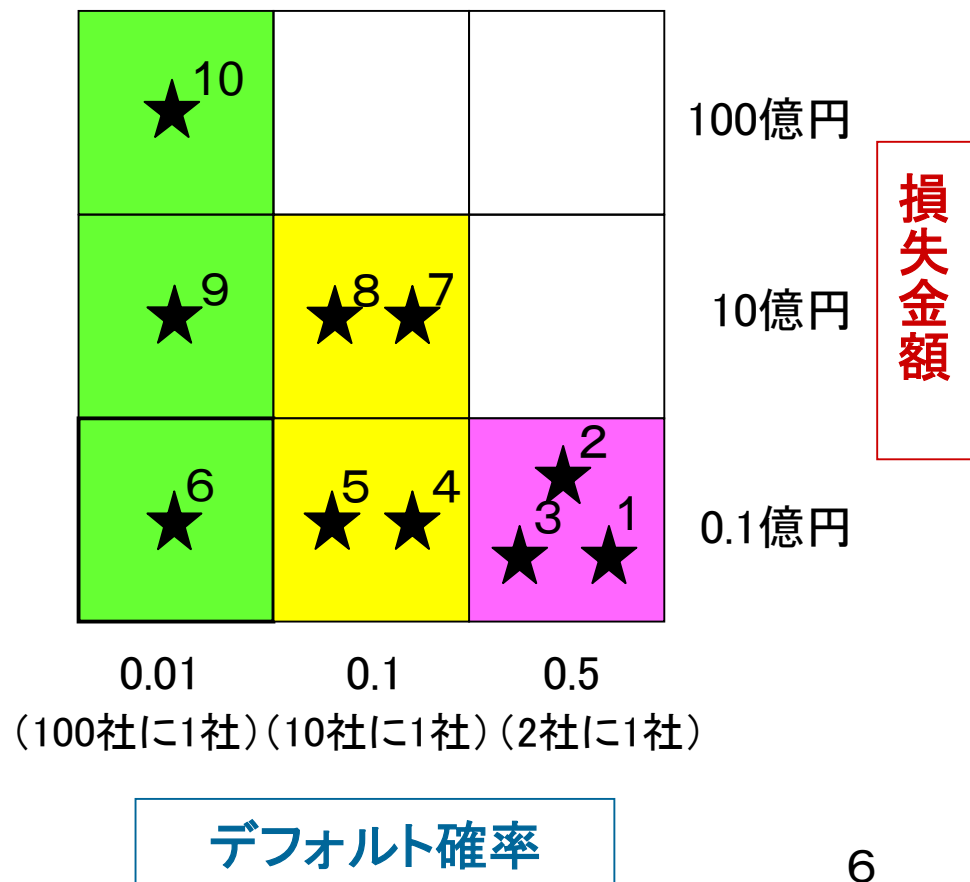
(注) 格付の低下等に伴う、与信の現在価値の下落を損失に含める考え方もある。

基本的な考え方



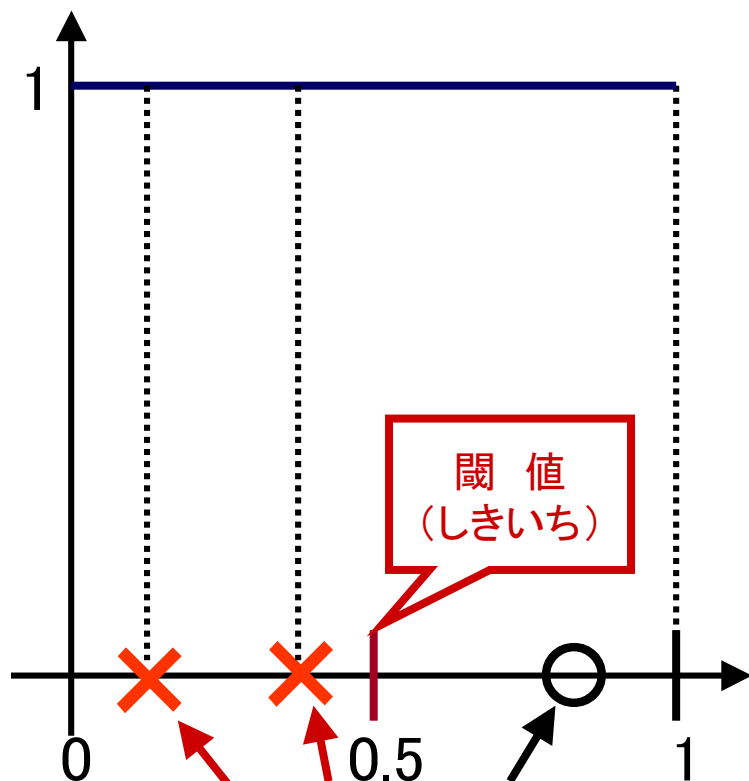
信用ポートフォリオの想定

債務者	格付	デフォルト 確率	損失 金額
1	C	0.5	0.1
2	C	0.5	0.1
3	C	0.5	0.1
4	B	0.1	0.1
5	B	0.1	0.1
6	A	0.01	0.1
7	B	0.1	10
8	B	0.1	10
9	A	0.01	10
10	A	0.01	100



(例1) 簡単な信用リスク計量モデル

一様分布



信用供与先1 デフォルト確率 0.5
損失金額 0.1億円

信用状態(Z_1)が 0.5 以下のとき

✕ : デフォルト 損失 0.1億円

信用状態(Z_1)が 0.5 超のとき

○ : 非デフォルト 損失 なし

信用状態(Z_1)

ExcelのRand関数 を使って
0~1の値をとる一様乱数(Z_1)
を発生させる。

供与先	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
損失	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01

試行	乱数1	乱数2	乱数3	乱数4	乱数5	乱数6	乱数7	乱数8	乱数9	乱数10
1	0.245	0.059	0.004	0.110	0.364	0.431	0.778	0.785	0.598	0.487
2	0.548	0.397	0.884	0.398	0.977	0.587	0.334	0.724	0.172	0.383
3	0.291	0.257	0.202	0.384	0.248	0.166	0.200	0.944	0.351	0.862
4	0.768	0.380	0.934	0.075	0.587	0.495	0.808	0.101	0.721	0.605
5	0.250	0.267	0.955	0.140	0.957	0.505	0.744	0.716	0.113	0.097
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

試行	損失1	損失2	損失3	損失4	損失5	損失6	損失7	損失8	損失9	損失10	損失計
1	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
2	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.100
3	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
4	0.000	0.100	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
5	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

○ : デフォルト(損失)が発生した箇所

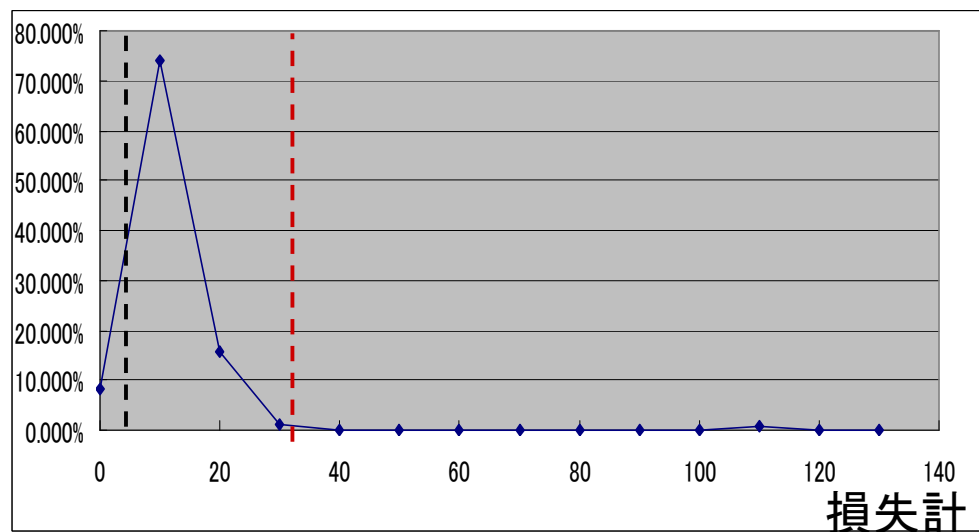
シミュレーション結果(試行回数: 1万回)

損失計	確率	累計
0	7.740%	7.740%
~ 10	73.470%	81.210%
~ 20	16.650%	97.860%
~ 30	1.120%	98.980%
~ 40	0.020%	99.000%
~ 50	0.000%	99.000%
~ 60	0.000%	99.000%
~ 70	0.000%	99.000%
~ 80	0.000%	99.000%
~ 90	0.000%	99.000%
~ 100	0.080%	99.080%
~ 110	0.780%	99.860%
~ 120	0.130%	99.990%
~ 130	0.010%	100.000%
130超	0.000%	100.000%

平均値	
理論値	3.3
試行値	3.3

	パーセント点
90.00%	10.2
95.00%	10.3
99.00%	31.0
99.50%	100.2
99.90%	110.1
99.95%	110.3

確率分布



(注)

(例2) マートン型の1ファクター・モデル

感応度
(追随率)

共通要因

固有要因

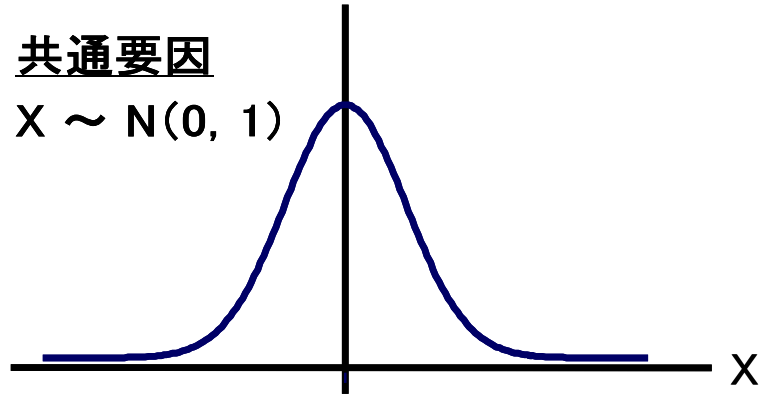
個別債務者(i)の信用状態 $Z_i = a_i X + \sqrt{1-a_i^2} Y_i$

- ◆ X 、 Y_i は互いに独立な標準正規分布にしたがうと仮定する。
⇒ Z_i も標準正規分布にしたがう。
- ◆ Z_i の X に対する感応度(追随率)を a_i と仮定する。

(注) 共通要因が1個という意味。複数の共通要因の存在を仮定する場合は、マルチ・ファクターモデルと呼ばれる。

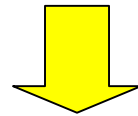
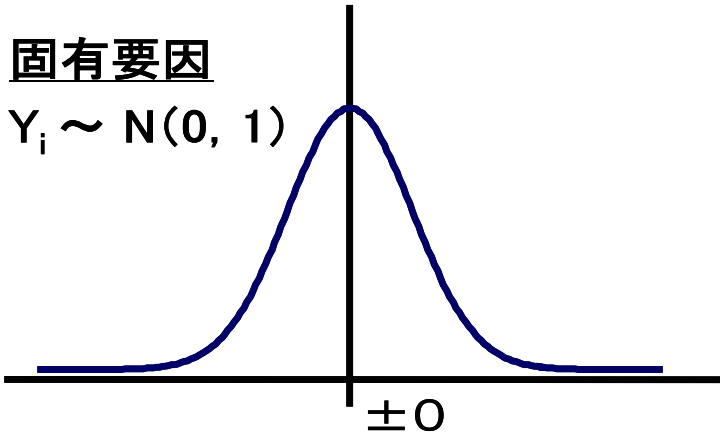
共通要因

$$X \sim N(0, 1)$$



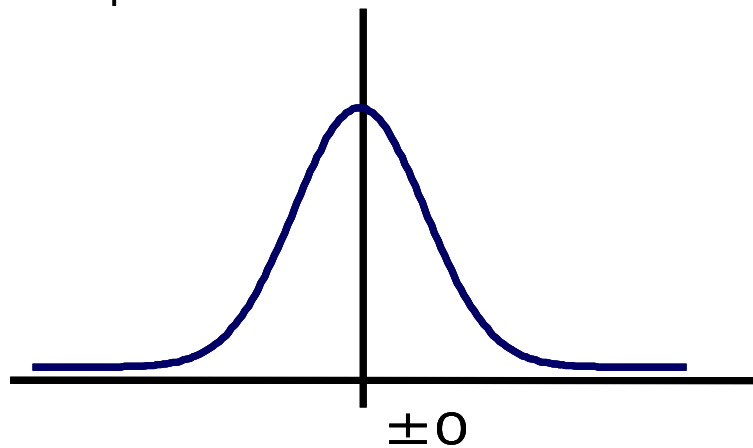
固有要因

$$Y_i \sim N(0, 1)$$



個別債務者 (i) の信用状態

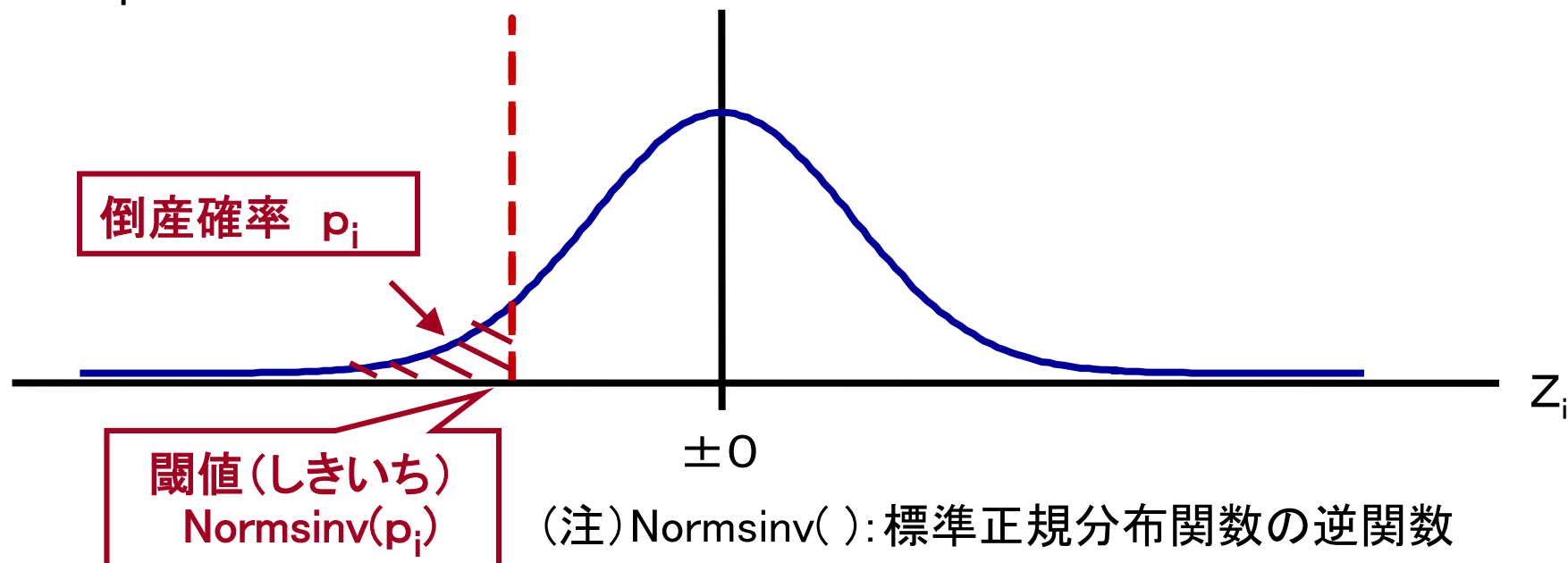
$$Z_i \sim N(0, 1)$$



$$Z_i = a_i X + \sqrt{1 - a_i^2} Y_i$$

個別債務者の信用状態

$Z_i \sim N(0, 1)$ 標準正規分布にしたがう。



個別債務者の信用状態(標準正規乱数 Z_i)が
閾値を下回った場合 ($Z_i \leq \text{Normsinv}(p_i)$) (注)
この債務者はデフォルトすると考える。

(注) p_i は、個別債務者のデフォルト確率。

	X	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
a	—	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
金額	—	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	—	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01
閾値	—	0.000	0.000	0.000	-1.282	-1.282	-2.326	-1.282	-1.282	-2.326	-2.326

試行	乱数X	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
1	-0.106	-0.683	1.890	-0.346	0.657	-0.720	-0.345	-0.727	-1.231	-0.835	-1.047
2	-1.419	0.386	-0.979	0.230	-0.788	0.343	-1.836	0.224	-0.052	0.825	-0.371
3	0.010	0.914	2.001	-0.830	-0.535	1.671	-0.460	-1.478	-0.571	0.728	0.965
4	0.939	0.508	0.694	-1.041	0.616	1.850	1.173	-0.562	0.091	0.328	1.136
5	-1.018	-0.557	-1.208	-1.710	0.648	0.214	1.134	0.041	-0.149	-1.929	-0.460
6	-1.889	-0.821	-1.786	-0.169	0.012	-0.383	-1.385	-2.541	-0.944	-0.358	-1.779
7	-1.611	0.545	-0.264	0.164	-2.471	-0.806	0.271	-1.459	-1.929	0.703	-0.364
8	1.349	-1.542	1.111	1.053	2.497	1.164	-0.119	-0.675	0.297	0.563	0.443
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

試行	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	損失計
1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.200
2	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
3	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	0.0	10.100
4	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
5	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.300
6	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	0.0	10.300
7	0.0	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	10.0	10.0	0.0	0.0	20.200
8	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

○ : デフォルト(損失)が発生した箇所

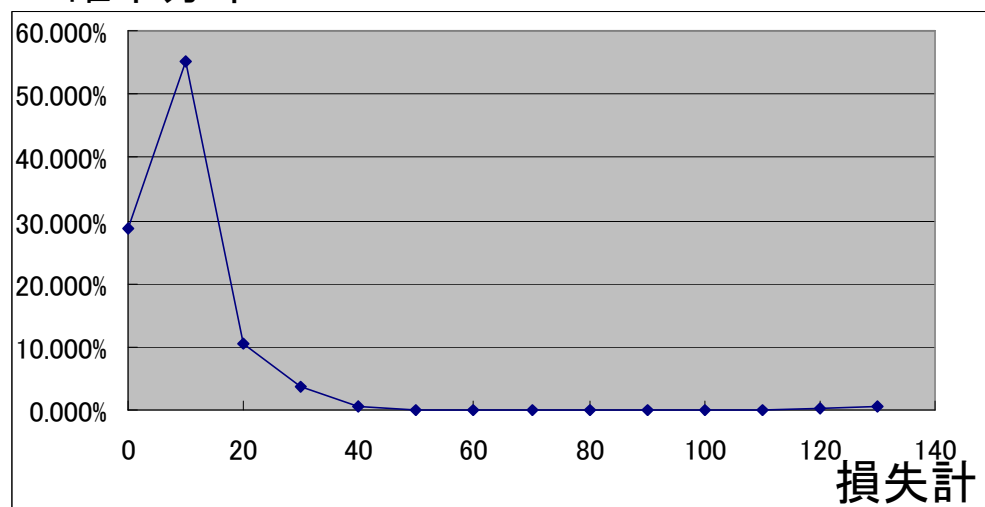
シミュレーション結果(試行回数:1万回)

損失計	確率	累計
0	28.850%	28.850%
~ 10	55.300%	84.150%
~ 20	10.650%	94.800%
~ 30	3.620%	98.420%
~ 40	0.430%	98.850%
~ 50	0.000%	98.850%
~ 60	0.000%	98.850%
~ 70	0.000%	98.850%
~ 80	0.000%	98.850%
~ 90	0.000%	98.850%
~ 100	0.000%	98.850%
~ 110	0.120%	98.970%
~ 120	0.300%	99.270%
~ 130	0.510%	99.780%
130超	0.220%	100.000%

	損失計
平均値	3.4

	パーセント点
90.00%	10.3
95.00%	20.2
99.00%	110.3
99.50%	120.5
99.90%	130.5
99.95%	130.6

確率分布



(参考1) マルチ・ファクター・モデル(業種別)

- ◆ 個別債務者の信用状態に影響を与える「業種別要因」の存在を仮定。

個別債務者(i)の信用状態

$$Z_i = a_i X_{s(i)} + \sqrt{1 - a_i^2} Y_i$$

$X_{s(i)}$: 債務者(i)の属する業種($s(i)$)の要因

(参考2)一般化マルチ・ファクターモデル

- ◆ 個別債務者の信用状態に影響を与える「複数の共通要因」の存在を仮定。

個別債務者(i)の信用状態

$$Z_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \cdots + a_{iN} X_N \\ + \sqrt{1 - (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{iN}^2)} Y_i$$

$X_1 \sim X_N$: 共通要因の例

(1) マクロ経済 (景気、金利、為替等)

(2) 業種

(3) 地域

留意事項

- ◆ 信用VaRでは、倒産確率(p_i)、損失(L_i)を推計する必要がある。

⇒ 債務者数が少ない、データ計測期間が短いなどの

データ制約から、推計値が安定しないことがある。

- ◆ 個別債務者の信用状態に関連性を仮定するケースではその関連性(感応度(a_i))を表すパラメータも推計する必要がある。

⇒ 上記パラメータの推計方法、検証方法が必ずしも

確立していない。

(3) オペリスクVaRの計測方法

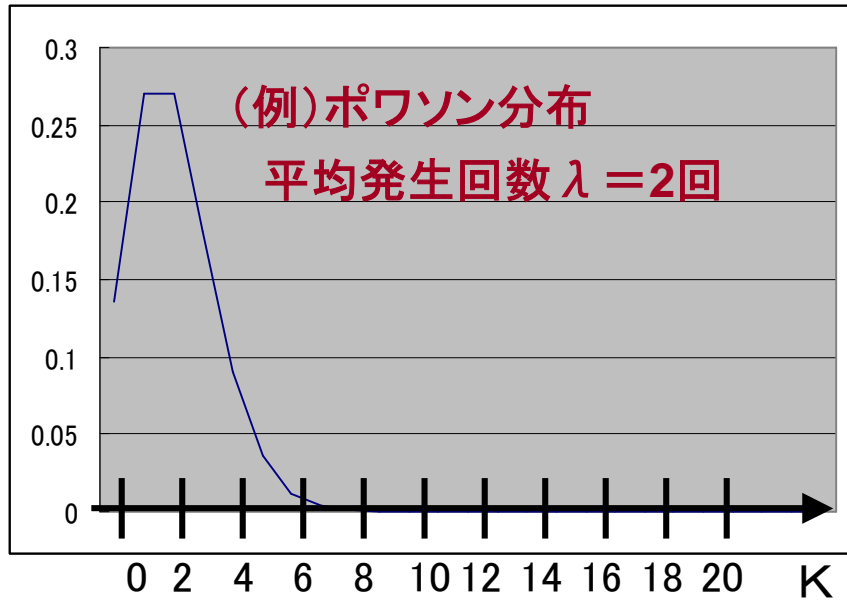
- ◆ 一定期間の事件・事故等の発生件数(K)と、1件当たりの損失発生額(L_j)を確率変数と考え、モンテカルロ・シミュレーションを行う。
- ◆ モンテカルロ・シミュレーションにより、一定期間の損失発生額の累計額($\sum_{j=1}^K L_j$)を繰り返し求めて、得られた損失分布からVaRを計測する。
 - ここでは、「損失分布手法」と呼ばれる手法によるVaRの計測方法を紹介する。

(例)「損失分布手法」によるVaRの計測

- ①一定期間(例えば1年間)当りのリスク事象の発生件数(実損失顕現化事例の発生件数)の「頻度分布」を損失データをもとに推定。
- ②1件当たり損失発生額の「損失金額分布」を損失データをもとに推定。
- ③両者を組み合わせて、モンテカルロ・シミュレーションを行い、一定期間の損失発生額の累計額の分布を作成する。
- ④一定期間の損失発生額の累計額の分布から、統計的に把握される一定の信頼水準の下での最大予想損失額(VaR)を算出する。

頻度分布

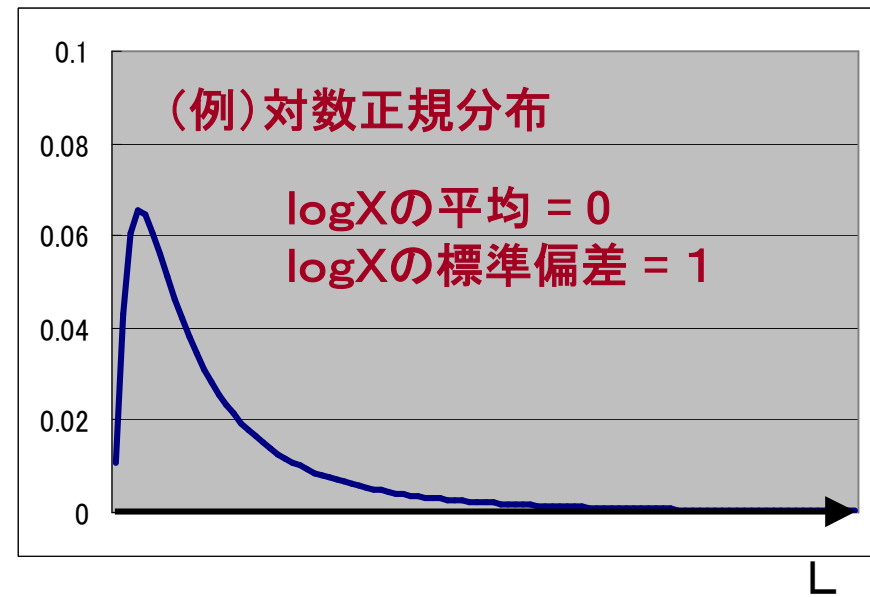
確率分布



リスク事象の発生件数

損失金額分布

確率分布



1件当たりの損失発生金額

事件事故の発生件数を
ポワソン分布にしたがう
乱数として発生させる

事件事故の発生件数分だけ、
損失額を、対数正規分布にしたがう
乱数として発生させる

(億円)

試行	発生件数	1	2	3	4	5	6	損失計
1	3	1.05	1.20	2.06	0.00	0.00	0.00	4.305
2	2	7.88	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	8.040
3	1	1.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.074
4	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
5	2	0.70	0.61	0.00	0.00	0.00	0.00	1.318
6	3	2.15	0.29	0.16	0.00	0.00	0.00	2.602
7	1	0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.699
8	4	0.61	1.44	0.44	0.17	0.00	0.00	2.663
9	3	3.91	0.78	0.40	0.00	0.00	0.00	5.088
10	3	3.87	0.21	1.83	0.00	0.00	0.00	5.914

○ : 事件・事故に伴う損失の発生

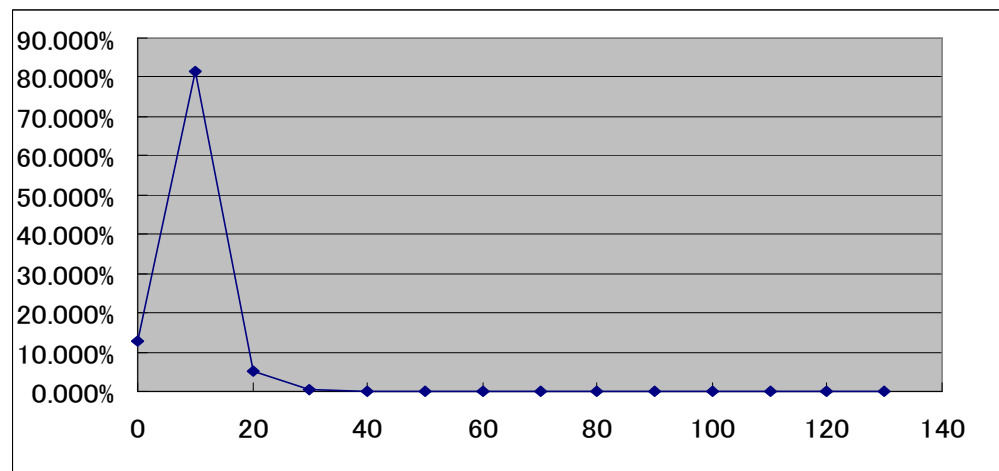
シミュレーション結果(試行回数:1万回)

損失計	確率	累計
0	12.810%	12.810%
～ 10	81.530%	94.340%
～ 20	5.080%	99.420%
～ 30	0.420%	99.840%
～ 40	0.100%	99.940%
～ 50	0.040%	99.980%
～ 60	0.020%	100.000%
～ 70	0.000%	100.000%
～ 80	0.000%	100.000%
～ 90	0.000%	100.000%
～ 100	0.000%	100.000%
～ 110	0.000%	100.000%
～ 120	0.000%	100.000%
～ 130	0.000%	100.000%
130超	0.000%	100.000%

	損失計
平均値	3.3
最大値	58.9

	発生件数
平均値	2.0
最大値	10.0

	パーセント点
90.00%	7.9
95.00%	10.4
99.00%	17.2
99.50%	21.2
99.90%	33.8
99.95%	40.1



留意事項

- ◆ 観測データやシナリオ・データから「頻度分布」や「損失金額分布」に関してフィットの良い確率分布を特定するのが難しい(統計的に高いスキルが必要)。
- ◆ オペレーショナル・リスクは、顕現化する頻度が少ない事象もあり、観測データが不足する。どのようなリスク事象が起き得るか、シナリオを作成して、観測データの不足を補う必要がある。
⇒ データ・コンソーシアムの構築が望まれる。

3. バックテストによるVaRの検証

- ◆ VaRは、過去の観測データから統計的手法を用いて計測された推定値。バックテストによる検証を要する。
- ◆ VaRの計測後、事後的にVaRを超過する損失が発生した回数を調べる。
 - ⇒ VaR超過損失の発生が、信頼水準から想定される回数を大幅に上回っていないか。

(参考)

バーゼル銀行監督委員会の3ゾーン・アプローチ

- ◆ 信頼水準99%、保有期間10日のトレーディング損益に関するVaR計測モデルについて、250回のうち何回、VaRを超過する損失が発生したかによって、その精度を評価する。

	超過回数	評価
グリーン・ゾーン	0～4回 (2%未満)	モデルに問題がないと考えられる
イエロー・ゾーン	5～9回 (2%以上4%未満)	問題の存在が示唆されるが決定的ではない
レッド・ゾーン	10回以上 (4%以上)	まず間違いなくモデルに問題がある。

「マーケット・リスクに対する所要自己資本算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテストングを利用するための監督上のフレームワーク」、1996年1月、バーゼル銀行監督委員会

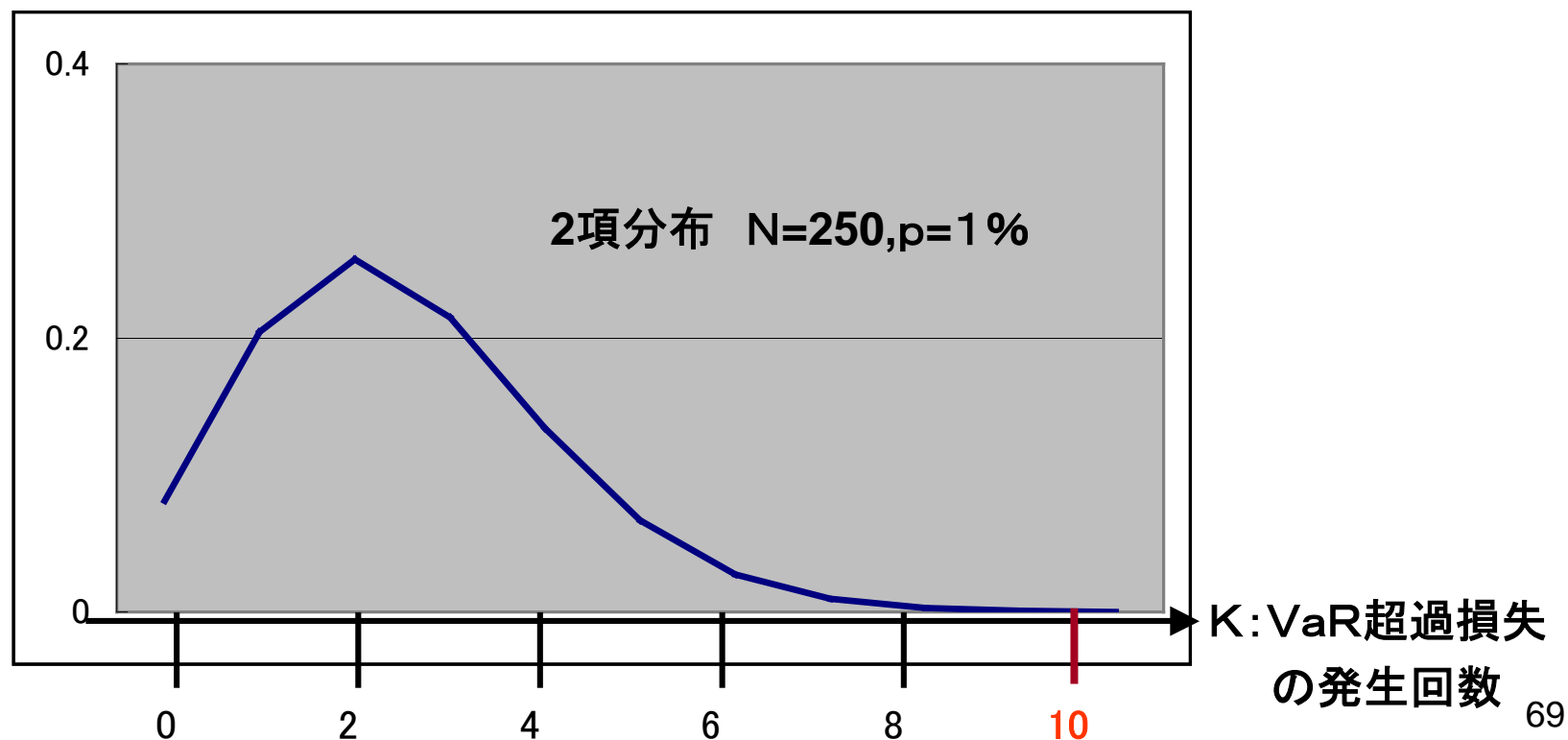
VaRを超過する損失が発生する回数(K)とその確率

VaRを超過する確率 $p = 1\%$

VaRを超過しない確率 $1-p = 99\%$ (信頼水準)

VaRの計測個数 $N=250$

$$\text{発生確率 } f(K) = {}_{250}C_K (0.01)^K (0.99)^{250-K}$$



バックテスト(2項検定)

観測データ数	250	N回
信頼水準	99%	
1 - 信頼水準	1%	p%

N回の観測で、K回、VaRを超過する確率

2項分布 ${}_N C_K p^K (1-p)^{N-K}$

VaR超過回数 (K回)	確率	確率	VaR超過回数 (K回以上)
0	8.11%	100.00%	0回以上
1	20.47%	91.89%	1回以上
2	25.74%	71.42%	2回以上
3	21.49%	45.68%	3回以上
4	13.41%	24.19%	4回以上
5	6.66%	10.78%	5回以上
6	2.75%	4.12%	6回以上
7	0.97%	1.37%	7回以上
8	0.30%	0.40%	8回以上
9	0.08%	0.11%	9回以上
10	0.02%	0.03%	10回以上
11	0.00%	0.01%	11回以上
12	0.00%	0.00%	12回以上
13	0.00%	0.00%	13回以上
14	0.00%	0.00%	14回以上
15	0.00%	0.00%	15回以上

バックテストは「検定」の考え方にしたがって行う。

■ VaR計測モデルは正しい(帰無仮説)。



■ VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生した。



■ VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生する確率は0.03%と極めて低い。



■ VaR計測モデルは誤っている(結論)

分散共分散法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日
-------	-----	---

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR(分散共分散法)			超過回数(超過1:範囲内:0)		
				株式投信	割引国債	ポート全体	7	4	6
2006/9/29	0.79	-0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	-2.99	0.31	-2.68						
2006/9/25	-3.78	0.69	-3.10						
2006/9/22	-3.14	0.56	-2.58						
2006/9/21	-3.89	-0.09	-3.98						
2006/9/20	-5.04	0.29	-4.75						
2006/9/19	-3.54	-0.01	-3.55						
2006/9/15	-2.47	0.10	-2.38						
2006/9/14	-2.25	-0.20	-2.44	9.05	1.99	8.41	0	0	0
2006/9/13	-1.82	0.19	-1.63	9.04	2.00	8.40	0	0	0
2006/9/12	-1.87	0.40	-1.47	9.03	2.01	8.40	0	0	0
2006/9/11	-0.23	0.43	0.20	9.02	2.01	8.39	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	9.02	2.03	8.40	0	0	0
2006/9/7	-0.59	1.18	0.59	9.02	2.05	8.40	0	0	0

ヒストリカル法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日
-------	-----	---

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR(ヒストリカル法)			超過回数(超過1:範囲内:0)		
				株式投信	割引国債	ポート全体	9	5	12
2006/9/29	0.79	-0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	-2.99	0.31	-2.68						
2006/9/25	-3.78	0.69	-3.10						
2006/9/22	-3.14	0.56	-2.58						
2006/9/21	-3.89	-0.09	-3.98						
2006/9/20	-5.04	0.29	-4.75						
2006/9/19	-3.54	-0.01	-3.55						
2006/9/15	-2.47	0.10	-2.38						
2006/9/14	-2.25	-0.20	-2.44	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/13	-1.82	0.19	-1.63	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/12	-1.87	0.40	-1.47	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/11	-0.23	0.43	0.20	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/7	-0.59	1.18	0.59	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0

バックテストの分析・活用

- ◆ バックテストにより、VaR超過損失の発生が判明したときはその原因・背景について、分析を行うのが重要。
- ◆ VaR超過損失の発生事例の分析により、
①ストレス事象の洗出しや、②VaR計測モデルの改善に繋げることができる。

VaR超過損失の発生原因・背景

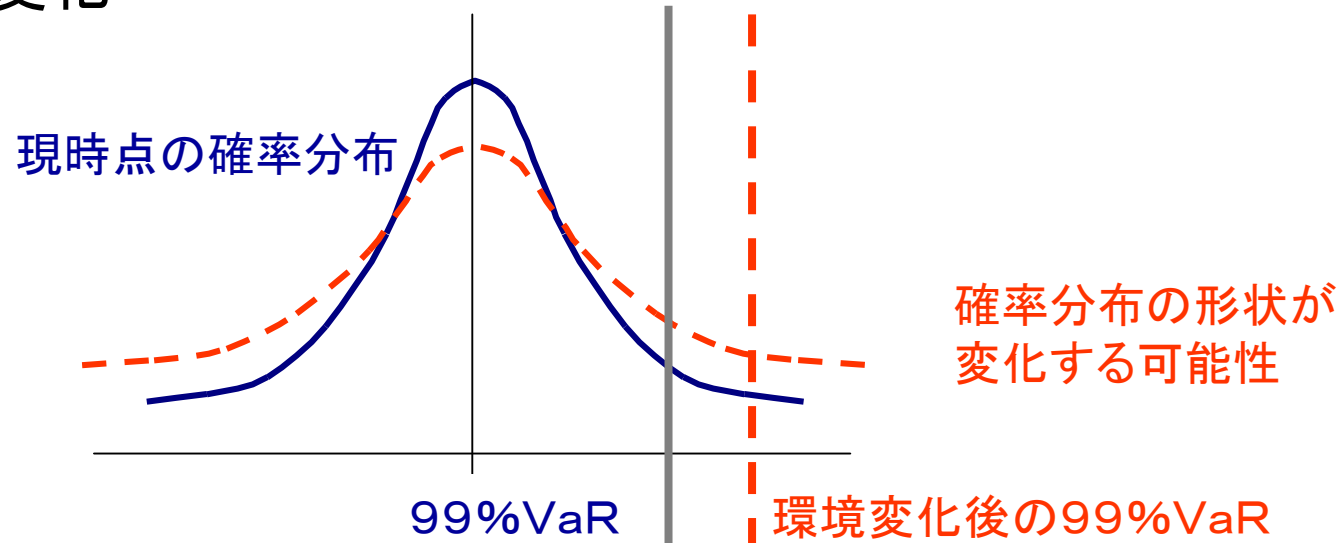
- ストレス事象の発生
- ボラティリティの変化
 - VaR計測後、ボラティリティが増大
- 確率分布モデルの問題
 - 実際の確率分布が正規分布よりもファットテイル
- トレンド、自己相関がある
 - \sqrt{T} 倍ルールでの近似に限界
- 観測データ数の不足
 - 観測データが不足すると、VaRは不安定化
- 観測期間が不適切
 - 遠い過去の観測データ(ボラティリティ小)の影響

4. VaRの限界とストレステスト

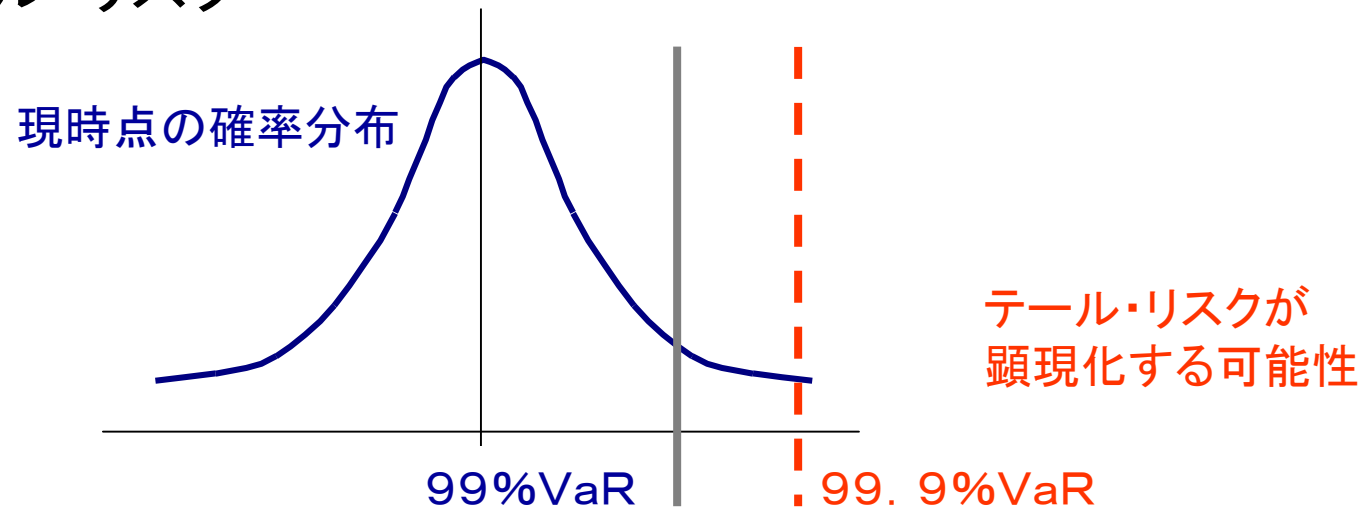
VaRの限界

- ◆ VaRは、過去の観測データにもとづき、統計的手法により計測される「推定値」に過ぎない。
- ◆ VaRでは、観測期間に捉えきれなかったストレス事象の発生リスクに備えることができない。
 - VaR計測モデルでは、これまでにない環境変化が起きると将来の予想損失を過少評価する可能性がある。
 - 環境変化が起きなくても、信頼水準を超過するテール事象が発生する可能性がある。

①環境変化



②テール・リスク



ストレステストによる補完

- ◆ VaRの限界を補完するため、ストレステストを行なうのが有用。
- ◆ ストレステストには様々な手法があるが、信頼水準の引き上げ(99%→99.9%)、相関の非勘案など、形式的に想定を厳しく置きなおして、損失の上振れをみるだけでは意味がない。
- ◆ 内外環境を十分に分析して、まず、組織全体でストレス事象に関する認識を共有することが重要。
 - ・組織のリスクプロファイルを適切に反映しているか
 - ・外部環境の変化に備えているか

ストレステスト

①環境変化： ストレスシナリオの作成

	客観性重視	柔軟性重視
ストレスシナリオ	<p>過去のショック時の変動・損失等をそのまま利用</p> <p>(例)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ブラック・マンデー時の株価下落 ・サブプライム問題の表面化に伴う証券化商品の下落 ・景気後退期の倒産確率上昇 ・各リスクファクターの過去10年間の最大変動 	<p>将来のありうる変動、損失等を自由に想定</p> <p>(例)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・200BPの金利上昇 ・イールドカーブのスティーピング or フラットニング ・大口取引先の連鎖倒産 ・大規模災害の発生 ・システム障害の発生
その他	<p>(例)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・より高い信頼水準(99.9%等) 	<p>(例)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ボラティリティの増大 ・相関の非勘案 ・より裾野が長い確率分布

②信頼水準の超過： 信頼水準の引上げ

①環境変化： 計測モデルの修正

VaRとストレステスト結果の比較

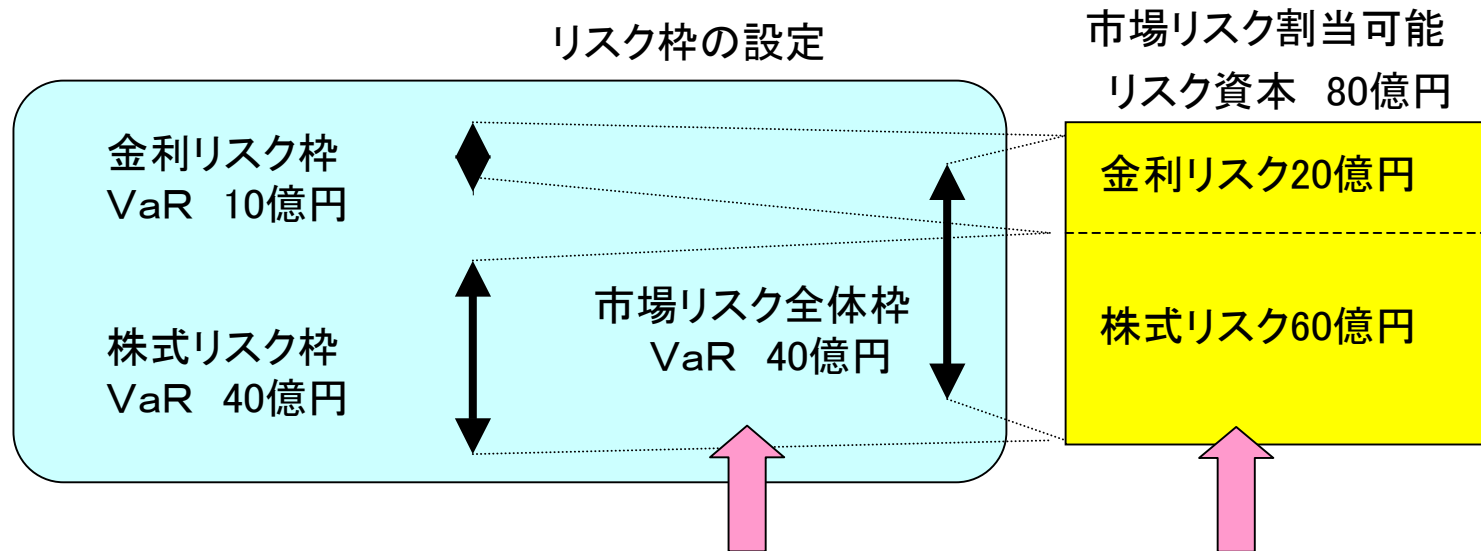
- ◆ 客観的な統計指標であるVaRと、主観的なシナリオに基づくストレステストの結果を突き合わせて、リスク量の上限を探る

ことが重要。

	VaR計測 信頼水準 (99%)	ストレステスト		
		VaR計測 信頼水準 (99.97%)	TOPIX ▲30% 金利 +100bp	TOPIX ▲50% 金利 +200bp
株式リスク	32億円	48億円	30億円	50億円
金利リスク	7億円	11億円	9億円	18億円
市場リスク全体	30億円 (相関考慮)	59億円 (単純合算)	39億円 (単純合算)	68億円 (単純合算)

(注) VaR計測は分散共分散法(\sqrt{T} 倍法)。保有期間125日間、観測期間250日

- ◆ VaRでリスク枠を設定して、対外的な説得性を増す。
- ◆ ストレステストの結果を踏まえ、リスク資本を配賦して、バッファを持つ。



	VaR計測 信頼水準 99% 保有期間125日	ストレステスト
		TOPIX ▲50% 金利 +200bp
株式リスク	32億円	50億円
金利リスク	7億円	18億円
市場リスク全体	30億円 (相関考慮)	68億円 (単純合算)

参考文献・資料

「金融リスクの計量化(上)バリュー・アット・リスク」

「金融リスクの計量化(下)クレジット・リスク」

木島正明 編著 金融財政事情研究会

「市場リスクの計量化とVaR」

山下智志 著 朝倉書店

「図説 金融工学とリスクマネジメント—市場リスクを考える 視点」

吉藤 茂 著 金融財政事情研究会

参考文献・資料

「バーゼルⅡ対応のすべて—リスク管理と銀行経営」
監査法人トーマツ金融インダストリーグループ編
金融財政事情研究会

「オペレーショナル・リスクのすべて」
三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会 著
東洋経済新報社

「オペレーショナル・リスク管理高度化への挑戦—最先端の実務
と規制の全貌」
小林孝明、清水真一郎、西口健二、森永聡編著
金融財政事情研究会

参考文献・資料

金融財政事情2008年7.21号

「わが国初のデフォルト相関・共倒れリスクの推計集中投資、
与信リスクを管理し、バーゼルⅡを満たすリスクを計測」

早稲田大学大学院ファイナンス研究科教授 森平爽一郎

CRD協会副代表理事 CRD研究所所長 瀬尾純一郎

CRD協会CRD研究所 主任アナリスト 佐藤隆行

日本銀行ワーキングペーパーシリーズ2008年6月

「与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関に
ついて—本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析—」

日本銀行金融機構局 橋本崇

日本銀行「市場リスク管理の基礎」セミナー

「Ⅰ. 市場リスクの計測手法 — 現在価値アプローチ」

日本銀行金融高度化センター 碓井茂樹